

Propiedades espectrales de los polinomios ortogonales.

R. Álvarez-Nodarse

*Departamento de Análisis Matemático. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
Apdo. 1160, E-41080, Sevilla, Spain*

e

*Instituto CARLOS I de Física Teórica y Computacional Universidad de Granada.
E-18071 Granada, Spain*

E-mail: ran@cica.es, renato@gandalf.ugr.es

WWW: <http://gandalf.ugr.es/~renato/>

Sevilla, 17 de julio de 1999

Resumen

En el presente trabajo se resumen algunas de los métodos utilizados para el estudio de las propiedades espectrales medias de los polinomios ortogonales clásicos. Un énfasis especial se hace en los métodos a partir de las relaciones de recurrencia a tres términos que satisfacen las familias de polinomios ortogonales. Como aplicación se muestran algunos ejemplos de familias clásicas continuas, discretas así como de q -polinomios.

Índice General

1	Algunas propiedades generales de los polinomios ortogonales	1
1.1	Propiedad de ortogonalidad y relación de recurrencia.	1
1.2	Propiedades de los ceros.	3
1.2.1	El teorema de separación de Chebyshev- Markov-Stieltjes.	3
2	Polinomios clásicos y q-polinomios	5
2.1	Los polinomios clásicos “continuos”.	5
2.2	Los polinomios clásicos “discretos”.	6
2.3	Los polinomios clásicos en redes no uniformes.	9
3	Propiedades espectrales.	13
3.1	Los momentos de la densidad de la distribución de ceros a partir de la ecuación diferencial de grado 2	13
3.1.1	Los momentos de la distribución de ceros.	14
3.1.2	La densidad WKB de la distribución de ceros.	16
3.2	Los momentos a partir de la relación de recurrencia a tres términos.	19
3.3	Distribución de ceros de los polinomios clásicos.	21
3.4	Distribución de ceros de los q -polinomios.	25
4	Aplicaciones.	34
4.1	Polinomios de Jacobi y Laguerre	34
4.1.1	Densidad WKB	34
4.1.2	Densidad asintótica a partir de la relación de recurrencia	35
4.2	Polinomios de Charlier y Chebyshev	38
4.3	q -Polinomios de Charlier y polinomios de Askey-Wilson.	41
4.3.1	Los q -polinomios de Charlier $c_n^\mu(x, q)$ en la red $x(s) = q^s$	41
4.3.2	Los q -polinomios de Askey y Wilson $p_n(x, a, b, c, d)$	42
	Bibliografía	44

1 Algunas propiedades generales de los polinomios ortogonales

1.1 Propiedad de ortogonalidad y relación de recurrencia.

Sea α una función no decreciente en (a, b) ($\alpha(x) \neq \text{const}$) y tal que si el intervalo (a, b) es no acotado, o sea si $a = -\infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) > -\infty$ y si $b = \infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) < \infty$. Diremos que una función f pertenece al espacio $L_\alpha^p[a, b]$ si

$$\int_a^b |f(x)|^p d\alpha(x) < \infty.$$

Cuando $p = 1$ escribiremos simplemente $f \in L_\alpha[a, b]$.

Definiremos el producto escalar de dos funciones f y g pertenecientes a $L_\alpha^2[a, b]$ como la integral de Stieltjes-Lebesgue

$$(1.1) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x).$$

Para una función α prefijada de antemano, la ortogonalidad respecto a la distribución $d\alpha$ vendrá definida por la relación:

$$\langle f, g \rangle = 0,$$

y diremos que f y g son ortogonales, o que, f es ortogonal a g respecto a la distribución $d\alpha$. Si α es absolutamente continua en el intervalo (a, b) , el producto escalar (1.1) se puede reescribir como la integral de Lebesgue:

$$(1.2) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx,$$

donde ρ es una función medible no negativa tal que $0 < \int_a^b \rho(x)dx < \infty$. A la función ρ la llamaremos función peso.

Consideremos ahora el *espacio vectorial* $L_\alpha^2(a, b)$. Definamos en este espacio el producto escalar (1.1) y la norma de un vector mediante la expresión $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Si $\|f\| = 0$ diremos que f es el vector nulo. Si $\|f\| = 1$ diremos que f es un vector normalizado. Si f no es nula entonces para cierto valor $\lambda \neq 0$ el vector λf es un vector normalizado.

Definiremos los momentos μ_m asociados a la distribución $d\alpha(x)$, a las cantidades

$$(1.3) \quad \mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m d\alpha(x),$$

que supondremos finitos. Si además $\alpha(x)$ tiene un número infinito de puntos de crecimiento en cierto intervalo $[a, b]$, entonces el proceso de ortogonalización de las potencias $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ respecto al producto escalar (1.2) nos conduce a una familia de polinomios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)P_m(x)d\alpha(x) = K_n\delta_{nm}, \quad P_n(x) = a_n x^n + \dots, \quad a_n > 0, \quad K_n \neq 0,$$

que denominaremos *polinomios ortogonales respecto a la distribución $d\alpha(x)$* . Además, dicha familia está unívocamente determinada con tal que fijemos la sucesión de coeficientes principales $\{a_n\}_{n=0}^\infty$. Un caso de gran importancia y utilidad es el caso *definido positivo* que corresponde a aquel cuando

$K_n > 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. En el caso cuando $a_n = 1$ para todo n se dice que la familia es una familia de polinomios ortogonales mónicos y su expresión explícita es

$$p_0(x) = 1, \quad p_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es importante destacar que en el caso cuando $\alpha(x)$, sólo tiene un número finito de puntos de crecimiento¹, por ejemplo N , el proceso anterior de ortogonalización nos conduce a una familia discreta $\{P_n\}_{n=0}^{N-1}$ [21, 64, 65, 75].

Una de las principales características de los polinomios ortogonales es que éstos satisfacen una relación de recurrencia a tres términos (RRTT) de la forma

$$(1.4) \quad \begin{aligned} xP_n(x) &= \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \\ P_{-1}(x) &= 0, \quad P_0(x) = 1. \end{aligned}$$

En el caso cuando P_n es una familia de polinomios mónicos, tenemos

$$\alpha_n = 1, \quad \beta_n = \frac{1}{K_n} \int_{-\infty}^{\infty} x P_n^2(x) d\alpha(x), \quad \gamma_n = \frac{K_n}{K_{n-1}} \neq 0.$$

Existe el recíproco de (1.4). O sea, dada una sucesión de números $\beta_n \in \mathbb{R}$ y $\gamma_n > 0$ y una sucesión de polinomios mónicos que satisface (1.4) existe una distribución $d\alpha(x)$ respecto a la cual dicha sucesión de polinomios conforman una sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Este resultado se conoce como Teorema de Favard [21]. Es importante destacar que la distribución $d\alpha(x)$ a la que se hace referencia en el teorema de Favard no es necesariamente única y para que lo sea es necesario que el problema de momentos de Hamburger asociado a ésta tenga solución única. Ello es equivalente a que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{K_{n-1}}$, diverja (condición de Carleman) [71, pag. 59].

Como un corolario de (1.4) se obtiene la conocida fórmula de Christoffel-Darboux:

$$(1.5) \quad K_n(x, y) \equiv \sum_{m=0}^n \frac{P_m(x)P_m(y)}{d_m^2} = \frac{\alpha_n P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{d_n^2 (x - y)}, \quad n \geq 1.$$

Si hacemos tender en (1.5) $y \rightarrow x$, obtenemos la fórmula *confluente* de Christoffel-Darboux:

$$(1.6) \quad K_n(x, x) \equiv \sum_{m=0}^n \frac{P_m^2(x)}{d_m^2} = \frac{\alpha_n}{d_n^2} [P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)] \quad n \geq 1.$$

¹Un ejemplo de tales familias son los polinomios discretos de Hahn y Chebyshev los cuales consideraremos más adelante.

1.2 Propiedades de los ceros.

En esta sección vamos a enunciar algunos de los resultados más generales relativos a los ceros de los polinomios ortogonales respecto a una distribución $d\alpha(x)$, siendo $\alpha(x)$ una función no decreciente.

Teorema 1 Sea $[a, b]$ el soporte de $d\alpha(x)$ y $\{P_n\}$ una SPO respecto a $d\alpha(x)$. Entonces:

1. Todos los ceros de P_n son reales, simples y están localizados en (a, b) .
2. Dos polinomios consecutivos P_n y P_{n+1} no pueden tener ningún cero en común.
3. Denotemos por $x_{n,j}$ a los ceros del polinomio P_n , (consideraremos en adelante que $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$). Entonces:

$$x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1},$$

es decir, los ceros de P_n y P_{n+1} entrelazan unos con otros.

4. Entre dos ceros consecutivos de P_n , existe al menos un cero de P_m , con $m > n$.

La demostración de estos resultados se puede encontrar en [2, 21, 64, 75].

1.2.1 El teorema de separación de Chebyshev- Markov-Stieltjes.

Los ceros de los polinomios ortogonales juegan un papel importante en el cálculo numérico de integrales. Por sencillez, vamos a denotar los ceros $x_{n,k}$ del polinomio P_n por x_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Supondremos además que (a, b) es el soporte de $d\alpha(x)$. Entonces, existen ciertos números $\{\lambda_{nk}\}_{k=1}^n$, tales que la igualdad

$$(1.7) \quad \int_a^b \pi(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} \pi(x_k),$$

es cierta cualquiera sea el polinomio π de grado a lo sumo $2n - 1$. Además ,

$$\lambda_{nk} = \frac{1}{P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x-x_k)} P_{n-1}(x) d\alpha(x) = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{K_{n-1}}{P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} = \frac{1}{K_n(x_k, x_k)}.$$

A la fórmula (1.7) se le llama fórmula de cuadraturas gaussianas.

Para probar la primera de las fórmulas anteriores es suficiente sustituir en (1.7) el polinomio $\pi(x) = \frac{P_n(x)P_{n-1}(x)}{(x-x_k)}$. La última es inmediata a partir de la fórmula confluyente de Christoffel-Darboux (1.6). Para probar la segunda igualdad es suficiente notar que $\frac{P_n(x)}{(x-x_k)} = \frac{a_n}{a_{n-1}} P_{n-1}(x) + q_{n-2}(x)$. Nótese que de lo anterior se deduce que $\lambda_{nk} > 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Por ello, existirán ciertos números, no necesariamente únicos, y_1, \dots, y_{n-1} , tales que $\lambda_{nk} = \alpha(y_k) - \alpha(y_{k-1})$, ($y_0 = a$, $y_n = b$).

Teorema 2 (Teorema de separación de Chebyshev-Markov-Stieltjes [75, Teorema 3.41.1, pag. 49]) Sean los números x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ los ceros del polinomio ortogonal P_n , y sean y_k , $k = 1, 2, \dots, n$ los números definidos anteriormente. Entonces se cumple que, para todo $k = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\alpha(x_k + 0) - \alpha(a) < \alpha(y_k + 0) - \alpha(a) = \lambda_{n1} + \dots + \lambda_{nk} < \alpha(y_{k+1} - 0) - \alpha(a) < \alpha(x_{k+1} - 0) - \alpha(a).$$

O sea, los ceros de P_n están separados por las cantidades y_k , $x_k < y_k < x_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [75, §3.41-§3.413]. Por completitud daremos la idea de la misma.

Ante todo, construyamos un polinomio π de grado $2n - 2$, tal que, para cada k fijo ($1 \leq k \leq n - 1$), se cumpla

$$\pi(x_j) = \begin{cases} 1 & j = 1, 2, \dots, k \\ 0 & j = k + 1, \dots, n \end{cases}$$

y $\pi'(x_j) = 0$, $j \neq k$, donde como antes x_k son los ceros del polinomio ortogonal P_n . Nótese que dicho polinomio π es único. Por el teorema de Rolle, π' se anula al menos una vez en el interior de cada uno de los intervalos abiertos

$$(x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k), (x_{k+1}, x_{k+2}), \dots, (x_{n-1}, x_n),$$

y por tanto tiene al menos $n - 2$ ceros, que junto a los $n - 1$ ceros impuestos por condición, nos conducen a que todos los ceros de π' son reales y simples. Luego, π es una función monótona entre dos ceros de π' , en particular entre el cero del intervalo (x_{k-1}, x_k) y x_{k+1} , y por tanto en $[x_k, x_{k+1}]$. Además, como $\pi(x_k) = 1$, y $\pi(x_{k+1}) = 0$, π es decreciente en $[x_k, x_{k+1}]$, luego tendremos que

$$\begin{aligned} \pi(x) &\geq 1 & a \leq x \leq x_k \\ \pi(x) &\geq 0 & x_k \leq x \leq b \end{aligned} .$$

Las dos desigualdades anteriores se deben a que todos los ceros de π' son simples, y por tanto son extremos locales de π , de hecho al ser π decreciente en $[x_k, x_{k+1}]$ y $\pi'(x_{k+1}) = 0$ y $\pi(x_{k+1}) = 0$, en x_{k+1} hay un mínimo local. Utilizando este hecho y lo anterior se tienen las desigualdades mencionadas (ver figura 1).

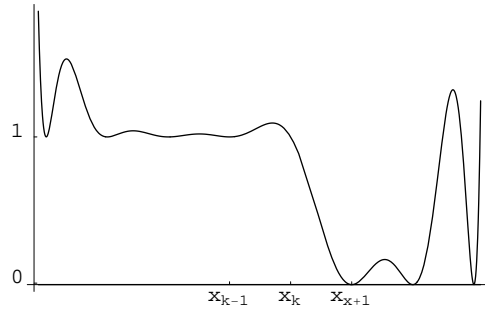


Figura 1: El polinomio π .

Finalmente, sustituyendo este polinomio π , en la fórmula de cuadratura (1.7), tenemos

$$\lambda_{n1} + \dots + \lambda_{nk} = \int_a^b \pi(x) d\alpha(x) > \int_a^{x_k+0} \pi(x) d\alpha(x) > \int_a^{x_k+0} d\alpha(x) = \alpha(x_k + 0) - \alpha(a).$$

Para probar la desigualdad restante, basta aplicar el mismo razonamiento a la familia de polinomios $(-1)^n P_n(-x)$, ortogonales respecto a la distribución $d(-\alpha(-x))$, cuyos ceros están localizados ahora en el interior del intervalo $[-b, -a]$ y son los opuestos a los de P_n .

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente teorema de separación

Teorema 3 Si la función $\alpha(x)$ que define una familia de polinomios ortogonales es constante en un abierto $(c, d) \subset (a, b)$, entonces los polinomios P_n ortogonales respecto a la distribución $d\alpha(x)$, tienen a lo sumo un cero en (c, d) .

Ello es evidente del hecho de que en el abierto (x_k, x_{k+1}) , siendo x_k y x_{k+1} dos ceros consecutivos de P_n , la función $\alpha(x_k + 0) < \alpha(x_{k+1} - 0)$, y por tanto $\alpha(x)$ no puede ser constante entre dos ceros consecutivos de P_n .

Este teorema es de mucha utilidad en el caso cuando $\alpha(x)$ sea una función escalonada pues nos dice que entre cada uno de los puntos donde $\alpha(x)$ tiene un salto hay como mucho un cero de los correspondientes polinomios. Ejemplo de tales funciones son las que conllevan a los polinomios ortogonales *discretos* de Hahn, Chebyshev, Meixner, Kravchuk y Chaliar, respectivamente [64, 65, 75].

2 Polinomios clásicos y q -polinomios

En este apartado daremos una breve introducción a los polinomios clásicos que nos permita situarnos en el tema y, más tarde, describir los problemas espectrales relacionados con ellos.

2.1 Los polinomios clásicos “continuos”.

Gran parte de las funciones especiales de la *Física-Matemática* son solución de la conocida ecuación diferencial de tipo hipergeométrico [64, 65]:

$$(2.1) \quad \tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0,$$

donde $\tilde{\sigma}(x)$ y $\tilde{\tau}(x)$ son polinomios de grados a lo más 2 y 1, respectivamente. Las soluciones de dicha ecuación tienen un enorme interés práctico, en particular las soluciones polinómicas que conducen a los polinomios ortogonales clásicos de Jacobi, Bessel, Laguerre y Hermite (ver tabla 1).

Tabla 1: Los polinomios ortogonales clásicos: caso continuo.

$P_n(x)$	Hermite $H_n(x)$	Laguerre $L_n^\alpha(x)$	Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}(x)$	Bessel $B_n^\alpha(x)$
$[a, b]$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$	$[-1, 1]$	circunferencia unidad
$\rho(x)$	e^{-x^2} —	$x^\alpha e^{-x}$ $\alpha > -1$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $\alpha, \beta > -1$	$\rho_0^\alpha(x) = 2^{\alpha+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{\Gamma(m+\alpha+1)x^m}$ $\alpha \neq -1, -2, \dots$
$\sigma(x)$	1	x	$1-x^2$	x^2

Dichos polinomios satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si y es solución de (2.1) las m -ésimas derivadas $y^{(m)} \equiv y_m$ satisfacen una ecuación del mismo tipo:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}(x)y_m'' + \tilde{\tau}_m(x)y_m' + \mu_m y_m &= 0, \\ \tilde{\tau}_m(x) &= \tilde{\tau}(x) + m\tilde{\sigma}'(x), \quad \mu_m = \lambda + m\tilde{\tau}'(x) + \frac{m(m-1)}{2}\tilde{\sigma}''(x). \end{aligned}$$

2. Las soluciones polinómicas de (2.1) se pueden expresar mediante la fórmula de Rodrigues:

$$(2.3) \quad P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\tilde{\sigma}^n(x)\rho(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

siendo $\rho(x)$ la solución de la ecuación diferencial de Pearson

$$(2.4) \quad [\tilde{\sigma}(x)\rho(x)]' = \tilde{\tau}(x)\rho(x), \quad \rho_m(x) = \tilde{\sigma}^m(x)\rho(x).$$

En general los polinomios P_n dados por la fórmula de Rodrigues (2.3) no tienen por que ser una sucesión de polinomios ortogonales. Para que ésto ocurra hay que imponer condiciones adicionales. Ello nos conduce al siguiente teorema [64, 65]

Teorema 4 *Supongamos que $x^k \tilde{\sigma}(x)\rho(x)|_{x=a,b} = 0$, $\forall k \geq 0$. Entonces las soluciones polinómicas $P_n(x)$ de la ecuación (2.2) constituyen una SPO respecto a la función peso $\rho(x)$ definida por la ecuación (2.4), o sea, se cumple que:*

$$(2.5) \quad \int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = \delta_{nm}d_n^2,$$

donde δ_{nm} es el símbolo de Kronecker y d_n denota la norma de los polinomios P_n .

La propiedad anterior nos dice que los polinomios clásicos satisfacen una relación de recurrencia a tres términos, es decir,

$$(2.6) \quad xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad \gamma_n \neq 0.$$

3. Como consecuencias de la fórmula de Rodrigues se tiene:

- (a) $\tilde{\tau}(x)$ es un polinomio de grado exactamente uno.
- (b) $P_n'(x)$ es ortogonal respecto a $\rho_1(x) = \tilde{\sigma}(x)\rho(x)$.
- (c) Es válida la fórmula diferencial-recurrente

$$(2.7) \quad \tilde{\sigma}(x)P_n'(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) + C_n P_{n+1}(x),$$

que conduce a la fórmula de estructura:

$$(2.8) \quad \tilde{\sigma}(x)P_n'(x) = \tilde{\alpha}_n P_{n+1}(x) + \tilde{\beta}_n P_n(x) + \tilde{\gamma}_n P_{n-1}(x).$$

Para más detalle sobre los polinomios ortogonales clásicos véase [1, 2, 7, 9, 21, 34, 43, 47, 56, 64, 65, 73, 75, 80, 81].

2.2 Los polinomios clásicos “discretos”.

En [64, 65] se considera una aproximación de la ecuación (2.1) consistente en sustituir las derivadas por un esquema en diferencias finitas. Existen una gran gama de esquemas a utilizar pero sin duda el más sencillo es aquel donde el intervalo real considerado se discretiza mediante una red uniforme, es decir utilizar la discretización de las derivadas primera y segunda

$$y'(x) \sim \frac{1}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right],$$

$$y''(x) \sim \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right].$$

Ello conduce a la ecuación *discreta* de tipo hipergeométrico

$$\tilde{\sigma}(x) \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - 2y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y(x) = 0,$$

que aproxima la ecuación original (2.1) en una *red uniforme* con paso $\Delta x = h$ hasta un orden $O(h^2)$ [65]. Generalmente se estudia el caso $h = 1$, que nos conduce a la ecuación equivalente

$$(2.9) \quad \sigma(x) \Delta \nabla y(x) + \tau(x) \Delta y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

escrita en términos de los operadores en diferencias finitas Δ y ∇ con paso $\Delta x = h = 1$ definidos por:

$$(2.10) \quad \Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

y conocidos como *operadores en diferencias finitas progresivas y regresivas*, respectivamente, donde $\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)$, $\tau(x) = \tilde{\tau}(x)$. Nótese que en (2.9) los coeficientes $\sigma(x)$ y $\tau(x)$ son polinomios de grados a lo más 2 y 1. La ecuación (2.9) se denomina *ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico* y sus soluciones polinómicas son los conocidos polinomios clásicos de variable *discreta* de Hahn, Meixner, Kravchuk, Charlier (ver tabla 2)[64, 65].

Tabla 2: Los polinomios ortogonales clásicos: caso discreto.

$P_n(x)$	Hahn $h_n^{\alpha, \beta}(x; N)$	Meixner $M_n^{\gamma, \mu}(x)$	Kravchuk $K_n^p(x)$	Charlier $C_n^\mu(x)$
$[a, b-1]$	$[0, N-1]$	$[0, \infty)$	$[0, N]$	$[0, \infty)$
$\rho(x)$	$\frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+x+1)}{\Gamma(N-x)\Gamma(x+1)}$ $\alpha, \beta \geq -1, n \leq N-1$	$\frac{\mu^x \Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+1)}$ $\gamma > 0, 0 < \mu < 1$	$\frac{N!p^x(1-p)^{N-x}}{\Gamma(N+1-x)\Gamma(x+1)}$ $0 < p < 1, n \leq N-1$	$\frac{e^{-\mu}\mu^x}{\Gamma(x+1)}$ $\mu > 0$
$\sigma(x)$ $\sigma(x) + \tau(x)$	$x(N+\alpha-x)$ $(x+\beta+1)(N-1-x)$	x $\mu x + \gamma\mu$	x $-\frac{p}{1-p}(x-N)$	x μ

Los polinomios de variable discreta solución de la ecuación anterior cumplen con propiedades análogas a las de los polinomios clásicos continuos:

1. Si y es solución de (2.1) las m -ésimas diferencias finitas $\Delta^m y \equiv y_m$ satisfacen una ecuación del mismo tipo:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma(x) \Delta \nabla y_m + \tau_m(x) \Delta y_m + \mu_m y_m &= 0, \\ \tau_m(x) &= \tau_{m-1}(x) + \Delta \sigma(x), \quad \mu_m = \mu_{m-1} + \Delta \tau_{m-1}, \quad \mu_0 = \lambda. \end{aligned}$$

2. Las soluciones polinómicas de (2.9) se pueden expresar mediante la fórmula de tipo Rodrigues:

$$(2.12) \quad P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n [\rho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k)], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

siendo $\rho(x)$ la solución de la ecuación en diferencias de tipo Pearson

$$(2.13) \quad \Delta[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x), \quad \rho_n(x) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k).$$

Al igual que en el apartado anterior para que las soluciones (2.12) de (2.9) constituyan una sucesión de polinomios ortogonales tenemos que exigir condiciones extra, conllevando éstas a ortogonalidades discretas y continuas. De hecho se tiene que:

Teorema 5 (Nikiforov, Uvarov [66]) Supongamos que existen dos valores a y b tales que $x^k \sigma(x) \rho(x)|_{x=a,b} = 0$, para todo $k \geq 0$. Entonces las soluciones polinómicas $P_n(x)$ de la ecuación (2.9) son ortogonales dos a dos respecto a la función peso $\rho(s)$ definida por la ecuación (2.13), o sea, se cumple la propiedad de ortogonalidad discreta

$$(2.14) \quad \sum_{s_i=a}^{b-1} P_n(s_i) P_m(s_i) \rho(s_i) = \delta_{nm} d_n^2, \quad s_{i+1} + s_i + 1,$$

donde, como antes, δ_{nm} es el símbolo de Kronecker y d_n denota a la norma de los polinomios P_n .

En el caso de que tenga lugar la condición

$$(2.15) \quad \int_{\Gamma} \Delta[\rho(z) \sigma(z) z^k] dz = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

siendo Γ un contorno del plano complejo, entonces tendremos que se cumple la propiedad de ortogonalidad continua

$$(2.16) \quad \int_{\Gamma} P_n(z) P_m(z) \rho(z) dz = 0, \quad n \neq m.$$

Aquí debemos destacar que, en el primer caso, a y b se suelen escoger de tal forma que $\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})$ sea positiva en el intervalo $[a, b - 1]$. Para ello se pueden elegir a y b como las soluciones de $\sigma(a) = 0$ y $\sigma(b - 1) + \tau(b - 1) = 0$ [64, 65]. En el segundo caso, si los polinomios son de coeficientes y variable reales es posible encontrar, casi siempre, un contorno Γ tal que la integral anterior se transforma en una integral sobre el eje real [11, 64, 65].

Es evidente que al igual que en el caso anterior, la propiedad de ortogonalidad (2.14) o bien la (2.16) nos conduce a una relación de recurrencia a tres términos de la forma (1.4) para las soluciones polinómicas de (2.9).

3. Como consecuencias de la fórmula de Rodrigues se tiene:

- (a) $\tau(x)$ es un polinomio de grado exactamente uno.
- (b) $\Delta P_n(x)$ es ortogonal respecto a $\rho_1(x) = \sigma(x + 1) \rho(x + 1)$.
- (c) Son válidas las fórmulas diferencias-recurrente

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \sigma(x) \nabla P_n(x) &= (A_n x + B_n) P_n(x) + C_n P_{n+1}(x) \\ [\sigma(x) + \tau(x)] \Delta P_n(x) &= (\tilde{A}_n x + \tilde{B}_n) P_n(x) + \tilde{C}_n P_{n+1}(x), \end{aligned}$$

que conducen a las dos fórmulas de estructura:

$$(2.18) \quad \sigma(x) \nabla P_n(x) = \tilde{\alpha}_n P_{n+1}(x) + \tilde{\beta}_n P_n(x) + \tilde{\gamma}_n P_{n-1}(x),$$

$$(2.19) \quad [\sigma(x) + \tau(x)] \Delta P_n(x) = \bar{\alpha}_n P_{n+1}(x) + \bar{\beta}_n P_n(x) + \bar{\gamma}_n P_{n-1}(x).$$

Tanto los polinomios clásicos continuos como discretos se pueden expresar [2, 47, 64, 65, 66] en función de las funciones hipergeométricas ${}_p F_q$ definidas por

$$(2.20) \quad {}_p F_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!},$$

donde $(a)_k := a(a + 1) \cdots (a + k - 1)$ es el símbolo de Pochhammer.

Para más detalles consultese los trabajos [2, 7, 34, 47, 38, 64, 65, 75, 80].

2.3 Los polinomios clásicos en redes no uniformes.

Otra posibilidad consiste en *discretizar* (2.1) en una red no uniforme $x(s)$ lo cual nos conduce a los q -polinomios. Para ello se aproximan las derivadas y' e y'' de la siguiente forma:

$$y'(x) \sim \frac{1}{2} \left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} + \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)} \right],$$

$$y''(x) \sim \frac{1}{x(s+\frac{h}{2}) - x(s-\frac{h}{2})} \left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} - \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)} \right].$$

La razón de escribir el factor $x(s+\frac{h}{2}) - x(s-\frac{h}{2})$ es debido a que la diferencia generalizada

$$\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)}$$

aproxima mejor a la primera derivada en $x(s-\frac{h}{2})$, que en $x(s)$ [65, pág. 55]. Sustituyendo las expresiones anteriores en (2.1), y haciendo el cambio lineal de la variable $s \rightarrow hs$ obtenemos la ecuación:

$$(2.21) \quad \tilde{\sigma}(x(s)) \frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \frac{1}{2} \tilde{\tau}(x(s)) \left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda y(s) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$(2.22) \quad \sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0,$$

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \frac{1}{2} \tilde{\tau}(x(s)) \Delta x(s-\frac{1}{2}), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(x(s)),$$

donde $\tilde{\sigma}(x(s))$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en $x(s)$; $\tilde{\tau}(x(s))$, de grado 1 y λ es una constante. Se puede comprobar que (2.22) aproxima a la ecuación original (2.1) en la *red no uniforme* $x(s)$ hasta orden $O(h^2)$. A la ecuación (2.22) se le denomina *ecuación de tipo hipergeométrico en una red no uniforme* y las soluciones y de la misma cumplen la propiedad, comúnmente denominada *propiedad de hipergeometricidad*, de que sus k -ésimas diferencias finitas generalizadas y_k , definidas por:

$$(2.23) \quad y_k(s) = \frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)} \frac{\Delta}{\Delta x_{k-2}(s)} \cdots \frac{\Delta}{\Delta x(s)} [y] \equiv \Delta^{(k)} y,$$

donde $x_m(s) = x(s + \frac{m}{2})$, satisfacen una ecuación del mismo tipo [59, 65].

Es importante destacar que no para cualquier función $x(s)$ la ecuaciones (2.21) o (2.22) tienen soluciones polinómicas de tipo hipergeométrico en $x(s)$ (ver ejemplo [13, ecuación (1.61) pág 191]). El conjunto más amplio de funciones $x(s)$ para las cuales se tienen soluciones que formen familias de polinomios viene dado por el siguiente teorema:

Teorema 6 ([13, 65]) *El conjunto más amplio de funciones $x(s)$ para las cuales la ecuación (2.22) tiene como solución una familia de polinomios de tipo hipergeométrico viene dado por:*

$$(2.24) \quad x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q),$$

donde $q \in \mathbb{C}$, y c_1, c_2, c_3 son constantes que pueden depender de q , pero son independientes de s .

Escogiendo las constantes c_1, c_2, c_3 de la forma adecuada, (2.24) se transforma, cuando $q \rightarrow 1$, en la familia de funciones (red cuadrática) [66]:

$$(2.25) \quad x(s) = \tilde{c}_1 s^2 + \tilde{c}_2 s + \tilde{c}_3,$$

a la que pertenecen los polinomios de Racah y los duales de Hahn [47, 65].

Ejemplos de q -polinomios son los q -polinomios de Hahn, Meixner, Kravchuk y Charlier [2, 47, 65, 66], Askey-Wilson [10, 47], entre otros.

Los q -polinomios satisfacen una serie de propiedades similares a la de los clásicos continuos y discretos:

1. Las soluciones polinómicas de (2.22) se expresan mediante el q -análogo de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de variable discreta en redes no uniformes:

$$(2.26) \quad P_n(s)_q = \frac{B_n}{\rho(s)} \nabla^{(n)} [\rho_n(s)], \quad \nabla^{(n)} \equiv \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_2(s)} \cdots \frac{\nabla}{\nabla x_n(s)},$$

donde

$$(2.27) \quad \rho_k(s) = \rho(s+k) \prod_{m=1}^k \sigma(s+m),$$

y $\rho(s)$ es la solución de la ecuación en diferencias de tipo Pearson en una red no uniforme:

$$(2.28) \quad \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} [\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s).$$

Generalmente la fórmula de Rodrigues (2.26) se reescribe de la forma

$$P_n(s)_q = \frac{B_n}{\rho(s)} \left[\frac{\delta}{\delta x(s)} \right]^n [\rho_n(s - \frac{n}{2})], \quad \left[\frac{\delta}{\delta x(s)} \right]^n \equiv \overbrace{\frac{\delta}{\delta x(s)} \frac{\delta}{\delta x(s)} \cdots \frac{\delta}{\delta x(s)}}^{n \text{ veces}},$$

donde $\delta f(s) = \nabla f(s + \frac{1}{2}) \equiv f(s + \frac{1}{2}) - f(s - \frac{1}{2})$.

De manera análoga al caso continuo o al de una red uniforme descritos anteriormente, las soluciones polinómicas (2.26) son ortogonales respecto a la función peso $\rho(s)$. De hecho se tiene un teorema análogo al descrito en el apartado anterior.

Teorema 7 (Nikiforov, Uvarov [66]) *Supongamos que existen dos valores a y b tales que $x^k(s - \frac{1}{2})\sigma(s)\rho(s)|_{s=a,b} = 0$, para todo $k \geq 0$. Entonces las soluciones polinómicas $P_n(s)_q$ de la ecuación (2.22) son ortogonales dos a dos respecto a la función peso $\rho(s)$ definida por la ecuación (2.28), o sea, se cumple que:*

$$(2.29) \quad \sum_{s_i=a}^{b-1} P_n(s_i)_q P_m(s_i)_q \rho(s_i) \Delta x(s_i - \frac{1}{2}) = \delta_{nm} d_n^2, \quad s_{i+1} + s_i + 1,$$

donde, como antes, δ_{nm} es el símbolo de Kronecker y d_n denota la norma de los polinomios P_n .

Análogamente, si

$$(2.30) \quad \int_{\Gamma} \Delta[\rho(z)\sigma(z)x^k(z - \frac{1}{2})] dz = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

para cierto contorno del plano complejo, entonces tendremos en vez de (2.29), la propiedad

$$(2.31) \quad \int_{\Gamma} P_n(z)_q P_m(z)_q \rho(z) \Delta x(z - \frac{1}{2}) dz = 0, \quad n \neq m.$$

Nuevamente, debemos destacar que a y b se suelen escoger de tal forma que $\rho(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})$ sea positiva en el intervalo $[a, b - 1]$. Para ello se pueden elegir a y b como las soluciones de $\sigma(a) = 0$ y $\sigma(b - 1) + \tau(b - 1) \Delta x(b - 1 - \frac{1}{2}) = 0$ [23, 65, 66]. También es posible probar que en caso de que los polinomios sean de coeficientes y variable reales es posible encontrar, en la mayor parte de los casos, un contorno Γ tal que la integral (2.31) se transforma en una integral sobre el eje real. Utilizando lo anterior se demostró de una forma muy sencilla la ortogonalidad de los polinomios de Askey-Wilson [12]. Más detalle sobre este tipo de ortogonalidad se puede encontrar en [10, 12, 11, 47, 65, 66].

Análogamente a los casos anteriores, las relaciones (2.29) y (2.31) implican que los polinomios (2.26) también satisfacen una relación de recurrencia a tres términos de la forma (1.4).

2. Como consecuencias de la fórmula de Rodrigues se tiene que

1. $\tau(x)$ es un polinomio de grado exactamente uno.
2. $\frac{\Delta P_n(s - \frac{1}{2})_q}{\Delta x(s - \frac{1}{2})}$ es ortogonal respecto a $\tilde{\rho}(s) = \rho_1(s - \frac{1}{2})$.
3. Son válidas las fórmulas diferencias-recurrente

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \sigma(s) \frac{\nabla P_n(s)_q}{\nabla x(s)} &= (A_n x + B_n) P_n(s)_q + C_n P_{n+1}(x)_q \\ [\sigma(s) + \tau(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})] \frac{\Delta P_n(s)_q}{\Delta x(s)} &= (\tilde{A}_n x + \tilde{B}_n) P_n(x)_q + \tilde{C}_n P_{n+1}(x)_q. \end{aligned}$$

Es importante notar que la ecuación (2.22) se puede reescribir de la forma

$$(2.33) \quad \sigma(-s - \mu) \frac{\Delta P_n(s)_q}{\Delta x(s)} - \sigma(s) \frac{\nabla P_n(s)_q}{\nabla x(s)} + \lambda_n \Delta x(s - \frac{1}{2}) P_n(s)_q = 0,$$

y la ecuación de tipo Pearson (2.28) en la forma

$$(2.34) \quad \frac{\rho(s + 1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(s) + \tau(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})}{\sigma(s + 1)} = \frac{\sigma(-s - \mu)}{\sigma(s + 1)}.$$

Además, por comodidad a la hora de tomar límites, se suele reescribir la función $x(s)$ de la siguiente forma:

$$(2.35) \quad x(s) = c_1(q)[q^s + q^{-s-\mu}] + c_3(q), \quad \text{donde } q^\mu = \frac{c_1(q)}{c_2(q)},$$

siendo

$$\Delta x(s - \frac{1}{2}) = B[2s + \mu]_q, \quad \text{donde } B = c_1(q)q^{\frac{-\mu}{2}} \kappa_q^2, \quad \kappa_q = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}).$$

En la expresión anterior hemos utilizado el símbolo $[n]_q$ para denotar a los q -números

$$(2.36) \quad [n]_q = \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad n \in \mathbb{C}.$$

Utilizando la propiedad de simetría:

$$(2.37) \quad x(s) = x(-s - \mu), \quad \Delta x(s - \frac{1}{2}) = - \Delta x(t - \frac{1}{2})|_{t=-s-\mu},$$

obtenemos de (2.33) que:

$$(2.38) \quad \tilde{\sigma}(x(s)) = \frac{1}{2}[\sigma(-s - \mu) + \sigma(s)], \quad \tilde{\tau}(x(s)) = \frac{\sigma(-s - \mu) - \sigma(s)}{\Delta x(s - \frac{1}{2})}.$$

De las expresiones anteriores se pueden sacar numerosas conclusiones. Por ejemplo de (2.38) se deduce que para prefijar una familia de polinomios es suficiente con fijar la red (parámetros c_1 , c_3 y μ) y el polinomio $\sigma(s)$ ya que $\tau(s)$ queda automáticamente prefijado. Ello indica que, a diferencia de los casos clásicos, el papel en el caso “ q ” lo juega la red, de ahí la importancia y el interés de la clasificación propuesta por Nikiforov y Uvarov en 1993 en [66]. Esta clasificación, a diferencia de la propuesta por Askey y desarrollada en [47] por Koekoek y Swarttouw basada en las series básicas [39], ha sido muy poco estudiada [2, 5, 12, 13, 19, 23, 55, 72]. Otra conclusión inmediata de (2.33) es la fórmula

$$(2.39) \quad \lambda_n = -\frac{Aq^\mu}{c_1^2(q)\kappa_q^4} [n]_q \left[2\mu + n - 1 + \sum_{i=1}^4 s_i \right]_q,$$

para λ_n en términos de los ceros de la función $\sigma(s)$, la cual se obtiene igualando las potencias de mayor orden en q^s en la ecuación (2.33).

Las soluciones polinómicas $P_n(s)_q$ de (2.22) se pueden expresar mediante las q -series hipergeométricas ${}_p\varphi_q$, definidas por:

$$(2.40) \quad {}_r\varphi_p \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix} ; q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k}{(b_1; q)_k \cdots (b_p; q)_k} \frac{z^k}{(q; q)_k} \left[(-1)^k q^{\frac{k}{2}(k-1)} \right]^{p-r+1},$$

donde

$$(2.41) \quad (a; q)_k = \prod_{m=0}^{k-1} (1 - aq^m),$$

o, como mediante la q -función hipergeométrica definida ${}_pF_q$ definida por

$$(2.42) \quad {}_rF_p \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} ; q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1|q)_k \cdots (a_r|q)_k}{(b_1|q)_k \cdots (b_p|q)_k} \frac{z^k}{(1|q)_k} \left[\kappa_q^k q^{\frac{1}{4}k(k-1)} \right]^{p-r+1},$$

siendo $(a|q)_k$ los q -análogos del símbolo de Pochhammer

$$(2.43) \quad (a|q)_k = \prod_{m=0}^{k-1} [a + m]_q = \prod_{m=0}^{k-1} \left(\frac{q^{\frac{a+m}{2}} - q^{-\frac{a+m}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right).$$

Nótese que ambas expresiones para $r = p + 1$, en el límite $q \rightarrow 1$ se transforman en la función hipergeométrica clásica (2.20).

A las familias de polinomios ortogonales soluciones de cualquiera de las ecuaciones (2.1), (2.9) y (2.22) se le conocen como *polinomios ortogonales hipergemétricos* [2, 47, 64, 65].

Para concluir este apartado debo recordar nuevamente que existen dos puntos de vista para tratar a los q -polinomios. Uno es el descrito aquí que consiste en considerarlos como solución de una ecuación en diferencias y que fue introducido por Nikiforov y Uvarov [59] en 1983 y que luego fue desarrollada en [12, 13, 23, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 74] (ver para una revisión actualizada [2]). El otro, y más arraigado, es el considerado por Askey y sus colaboradores que se basa en el hecho de que todas las familias de q -polinomios se pueden expresar como series hipergeométricas básicas, por lo que es evidente que este método es menos general al ser ésta una propiedad intrínseca de las soluciones de (2.22).

También es necesario destacar que para los q -polinomios en la red exponencial $x(s) = q^s$, J. C. Medem [57] ha desarrollado un método análogo al descrito en [38, 56] que permite una caracterización de gran parte de los polinomios que aparecen en el q -análogo de la tabla de

Askey [47]. Para la red general (2.35) este problema sigue abierto. Para más detalle véase [2, 6, 10, 14, 36, 47, 48, 49, 50, 57, 64, 65, 74, 80]

3 Propiedades espectrales.

Aunque, como hemos visto, los polinomios clásicos son bien conocidos, existen en la actualidad varios problemas no completamente resueltos. Por ejemplo: la distribución de ceros y propiedades globales exactas y asintóticas de ceros. Es conocido que dado un polinomio $P_n(x)$, los momentos μ_m de la distribución de ceros $\rho_n(x)$

$$(3.1) \quad \rho_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - x_{n,i}),$$

vienen dados por la expresión

$$(3.2) \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_m^{(n)} = \int_a^b x^m \rho_n(x) dx, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

En ambas fórmulas $\{x_{n,i}\}_{i=1}^n$ representan los ceros del polinomio $P_n(x)$. El caso de los polinomios de Jacobi, Laguerre, Hermite y Bessel ha sido estudiado por diversos autores utilizando diversas técnicas del análisis clásico e.g. [8, 16, 20, 17, 18, 27, 35, 37, 40, 41, 42, 54, 58, 76, 77, 78, 79, 82, 83, 84, 85]. Sin embargo, el caso discreto (Hahn, Meixner, Kravchuk y Charlier) ha necesitado de nuevos conceptos de la teoría del potencial logarítmico (análisis complejo, ver [70]) en el plano los cuales han sido introducidos muy recientemente por Rakhmanov [68] y desarrollados por Dragnev y Saff [31, 32] y Kuijlaars y Van Assche [52, 53] (para una revisión del tema véase [51]).

De las técnicas utilizadas para el estudio de las propiedades globales vamos a comentar brevemente dos de ellas:

1. A partir de la ecuación diferencial
2. A partir de la relación de recurrencia a tres términos

No obstante debemos destacar que desde el punto de vista simbólico, el estudio de los momentos a partir de la expresión explícita de los polinomios es quizás el método más útil. Un estudio detallado desde este punto de vista se debe a Zarzo [82].

3.1 Los momentos de la densidad de la distribución de ceros a partir de la ecuación diferencial de grado 2

Veamos como a partir de la ecuación diferencial se pueden estudiar las propiedades espectrales de sus soluciones polinómicas. Nos centraremos, por simplicidad, en el caso de una ecuación diferencial de orden 2 (los clásicos, como ya hemos dicho antes, satisfacen este tipo de ecuaciones)

Para calcular los momentos de cualquier orden podemos utilizar un algoritmo general propuesto por Buendía, Dehesa y Gálvez [18]. Este método es muy general pero los cálculos son extremadamente tediosos. Por ello suelen ser utilizados para calcular los momentos de orden bajo. Para calcular la densidad de la distribución de ceros $\rho_n(x)$ alrededor del origen utilizaremos la aproximación *semi-clásica* o *WKB* propuesta por Arriola, Dehesa, Yañez y Zarzo, entre otros: [8, 84, 85].

Pasemos a describir los fundamentos de ambos algoritmos.

3.1.1 Los momentos de la distribución de ceros.

En primer lugar describamos un algoritmo general para calcular los momentos μ_r de la distribución de ceros de las soluciones polinómicas de una ecuación diferencial de grado 2. Este método es válido, en general, para las ecuaciones diferenciales de orden arbitrario [18]. Nosotros nos limitaremos a estudiar brevemente el caso de una ecuación diferencial de segundo orden.

Sea la ecuación diferencial de segundo orden:

$$(3.3) \quad \tilde{\sigma}(x) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) + \tilde{\tau}(x) \frac{d}{dx} P_n(x) + \tilde{\lambda}_n(x) P_n(x) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x) &= \sum_{j=0}^{c_2} a_j^{(2)} x^j = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} x + a_2^{(2)} x^2 + a_3^{(2)} x^3 + \cdots + a_{c_2}^{(2)} x^{c_2}, \\ \tilde{\tau}(x) &= \sum_{j=0}^{c_1} a_j^{(1)} x^j = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x + a_2^{(1)} x^2 + a_3^{(1)} x^3 + \cdots + a_{c_1}^{(1)} x^{c_1}, \\ \tilde{\lambda}_n(x) &= \sum_{j=0}^{c_0} a_j^{(0)} x^j = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} x + a_2^{(0)} x^2 + \cdots + a_{c_0}^{(0)} x^{c_0}, \end{aligned}$$

y $a_j^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, c_j$ son ciertas constantes que, en general, dependen de n . Supondremos que todos los ceros de $P_n(x)$ son simples, lo cual es válido para los casos que vamos a considerar. Escribamos el polinomio $P_n(x)$ de la forma:

$$P_n(x) = \prod_{l=1}^n (x - x_l) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \xi_k x^{n-k}, \quad \xi_0 = 1,$$

$$\xi_k = \frac{(-1)^k}{k!} \mathcal{Y}_k(-y_1, -y_2, -2y_3, \dots, -(k-1)!y_n),$$

donde \mathcal{Y}_k denota los, conocidos en la teoría de números, polinomios de Bell [69] y los y_r están definidos por $y_r = \sum_{i=1}^n x_{n,i}^r$. Para los primeros valores ξ_k tenemos [18, 69]:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= y_1, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} (y_1^2 - y_2), \\ \xi_3 &= \frac{1}{6} (y_1^3 - 3y_1 y_2 + 3y_3), \\ \xi_4 &= \frac{1}{24} (y_1^4 - 6y_1 y_2 + 8y_1 y_3 + 3y_2^2 - 6y_4). \end{aligned}$$

Derivando $P_n(x)$ obtenemos, para las derivadas $P_n'(x)$ y $P_n''(x)$, las expresiones:

$$P_n'(x) = \sum_{k=0}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (x - x_l) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k) \xi_k x^{n-k-1},$$

$$P_n''(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{m=1 \\ l \neq k}}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k \\ k \neq m}}^n (x - x_l) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)(n-k-1) \xi_k x^{n-k-2}.$$

Sustituyendo dichas expresiones en la ecuación diferencial (3.3), obtenemos:

$$(3.5) \quad \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=0}^{c_0} a_j^{(0)} (-1)^k \xi_k x^{n-k+j} + \sum_{j=0}^{c_1} a_j^{(1)} (-1)^k \xi_k (n-k) x^{n-k-1+j} + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{c_2} a_j^{(2)} (-1)^k \xi_k (n-k)(n-k-1) x^{n-k-2+j} \right] = 0.$$

Sea $q = \max(c_0, c_1 - 1, c_2 - 2)$. Completamos los coeficientes polinómicos de (3.3) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(x) &= \sum_{j=0}^{q+2} a_j^{(2)} x^j = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} x + a_2^{(2)} x^2 + a_3^{(2)} x^3 + \cdots + a_{q+2}^{(2)} x^{q+2}, \\ \bar{\tau}(x) &= \sum_{j=0}^{q+1} a_j^{(1)} x^j = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x + a_2^{(1)} x^2 + a_3^{(1)} x^3 + \cdots + a_{q+1}^{(1)} x^{q+1}, \\ \bar{\lambda}_n(x) &= \sum_{j=0}^q a_j^{(0)} x^j = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} x + a_2^{(0)} x^2 + \cdots + a_q^{(0)} x^q, \end{aligned}$$

pudiendo ocurrir que algunos de los nuevos coeficientes $a_k^{(i)}$ sean nulos. Ahora (3.5) se puede escribir de forma compacta como:

$$(3.6) \quad \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{q+i} a_j^{(j)} (-1)^k \frac{(n-k)!}{(n-k-i)!} \xi_k x^{n-k+j-i} = 0.$$

Comparando los coeficientes de las potencias de mayor orden ($k = 0$) en (3.6) obtenemos la condición:

$$\sum_{i=0}^2 a_{i+q}^{(i)} \frac{n!}{(n-i)!} = 0,$$

que es una condición necesaria para que la ecuación diferencial (3.3) admita soluciones polinómicas ya que en ella sólo intervienen sus coeficientes. Si comparamos ahora los coeficientes de las potencias x^{n+q-s} , $s = 1, 2, \dots$, obtenemos las ecuaciones:

$$\sum_{m=0}^s \sum_{i=0}^2 \frac{(n+m-s)!}{(n+m-s-i)!} a_{i+q-m}^{(i)} (-1)^{s-m} \xi_{s-m} = 0, \quad s > 1.$$

Como vemos, la expresión anterior nos da una fórmula recurrente para calcular el valor de ξ_s , conocidos los $s - 1$ valores anteriores ξ_k , $k = 1, 2, \dots, s - 1$. Despejando el valor ξ_s obtenemos la fórmula (ver [18], (Sección II, fórmula (13) pág. 226):

$$(3.7) \quad \xi_s = - \frac{\sum_{m=1}^s (-1)^m \xi_{s-m} \sum_{i=0}^2 \frac{(n-s+m)!}{(n-s+m-i)!} a_{i+q-m}^{(i)}}{\sum_{i=0}^2 \frac{(n-s)!}{(n-s-i)!} a_{i+q}^{(i)}}.$$

Esta expresión, junto con (3.4), nos permite calcular los valores y_k para cualquier k y, por tanto, los momentos $\mu_k = \frac{1}{n} y_k$ de cualquier orden de la distribución de ceros (3.2) de los polinomios $P_n(x)$, soluciones de (3.3). No obstante, como se deduce de las relaciones (3.4), esta técnica de

encontrar los momentos sólo es óptima para los momentos de orden bajo, ya que dichas relaciones son altamente no lineales. Existen otros procedimientos alternativos para calcular los momentos de orden superior que no vamos a considerar aquí (ver [18] y las referencias contenidas en el mismo.)

3.1.2 La densidad WKB de la distribución de ceros.

Pasemos a continuación a describir la aproximación *semi-clásica* o *WKB* [8, 84, 85], que nos permitirá obtener una aproximación de la densidad de la distribución real $\rho_n(x)$ (3.1). Partiremos, al igual que antes, de la ecuación diferencial de grado 2 (3.3). Realizando el cambio en la variable dependiente:

$$P_n(x) = u(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{\tilde{\tau}(x)}{\tilde{\sigma}(x)} dx\right),$$

podemos escribir la ecuación (3.3) en su forma auto-adjunta:

$$(3.8) \quad \frac{d^2}{dx^2} u(x) + S(x)u(x) = 0,$$

donde la función $S(x)$ tiene la forma:

$$(3.9) \quad S(x) = \frac{1}{4\tilde{\sigma}(x)^2} \left\{ 2\tilde{\sigma}(x)[2\tilde{\lambda}(x) - \tilde{\tau}'(x)] + \tilde{\tau}(x)[2\tilde{\sigma}'(x) - \tilde{\tau}(x)] \right\}.$$

Nótese que $P_n(x)$ y $u(x)$ tienen los mismos ceros. Para que las soluciones de (3.8), y, por tanto, de (3.3), tengan más de un cero en un intervalo dado es preciso que $S(x) > 0$ en dicho intervalo. Ello es consecuencia del siguiente teorema de comparación de Sturm [15, 22, 44]:

Teorema 8 (*Teorema de comparación de Sturm*)

Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ soluciones no triviales de $u_1''(x) + p(x)u_1(x) = 0$ y $u_2''(x) + q(x)u_2(x) = 0$, respectivamente, y $p(x) \geq q(x)$. Entonces $u_1(x)$ se anula, al menos una vez, entre dos ceros consecutivos de $u_2(x)$.

Si consideramos la ecuación $u''(x) + q(x)u(x) = 0$, con $q(x) \leq 0$, entonces las soluciones no triviales $u(x)$ no pueden tener más que un cero. La demostración es por reducción al absurdo. Supongamos que las soluciones $u(x)$ se anulan más de una vez entre dos ceros consecutivos de la solución de $u_0''(x) = 0$, correspondiente al caso $p(x) \equiv 0 \geq q(x)$, entonces según el Teorema de comparación de Sturm la solución $u_0(x) \equiv 1$ de $u_0''(x) = 0$ se tendrá que anular al menos una vez entre los ceros consecutivos de $u(x)$, lo cual es una contradicción. ■

En adelante nos interesaremos por los intervalos I donde $S(x) > 0$, pues si $S(x) \leq 0$ sólo tenemos, a lo sumo, un cero y, por tanto, no tiene sentido hablar de la densidad de la distribución de ceros. Continuaremos transformando la ecuación diferencial (3.8) realizando la *sustitución de Liouville* definida mediante las expresiones:

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \sqrt{S(x)}, \quad \text{ó } \phi(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{S(x)} dx, \quad V(\phi) \equiv v(x) = \sqrt[4]{S(x)} u(x).$$

Esta sustitución se aplica, en general, para transformar las ecuaciones del tipo (3.8) en ecuaciones de la forma $\frac{d^2 v(\phi)}{d\phi^2} + f(\phi)v(\phi) = 0$, donde $f(\phi)$ es *cercana* a una constante. En nuestro caso al realizar la sustitución de Liouville en (3.8) obtenemos la ecuación:

$$(3.10) \quad V''(\phi) + [1 + \delta(\phi)]V(\phi) = 0, \quad V''(\phi) \equiv \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2},$$

donde

$$(3.11) \quad \delta(\phi) \equiv \epsilon(x) = \frac{1}{4[S(x)]^2} \left\{ \frac{5[S'(x)]^2}{4[S(x)]} - S''(x) \right\} = \frac{P(x, n)}{Q(x, n)},$$

y $P(x, n)$, $Q(x, n)$ son polinomios en x y n . La solución de (3.10) si $\epsilon(x) \ll 1$ es, en primera aproximación, igual a $V_0(x) = C_1 \text{sen}(\phi + C_2)$ (solución de la ecuación $V_0''(\phi) + V_0(\phi) = 0$). Para demostrar este resultado podemos escribir la ecuación integral equivalente a (3.10) que se obtiene aplicando el método de variación de las constantes [33] a (3.11):

$$V(\phi) = C_1 \text{sen}(\phi + C_2) - \int_{\phi_0}^{\phi} \delta(u) V(u) \text{sen}(\phi - u) du.$$

Esta ecuación se puede resolver por métodos iterativos. Es decir, para obtener la solución de la ecuación integral podemos sustituir la primera aproximación $V_0(\phi) = C_1 \text{sen}(\phi + C_2)$ por $V(\phi)$ en la expresión de la derecha y obtenemos la función $V_1(\phi)$. Luego, se sustituye la función $V_1(\phi)$ por $V(\phi)$ en la expresión de la derecha y obtenemos una $V_2(\phi)$, y así sucesivamente. Para poder despreciar los términos de orden superior y restringirnos sólo al valor aproximado $V(\phi) \approx V_0(\phi)$ es necesario que la diferencia entre las primera y segunda aproximaciones V_0 y V_1 cumplan con la condición:

$$|V_1(\phi) - V_0(\phi)| = |C_1| \int_{\phi_0}^{\phi} |\delta(u)| du \ll 1.$$

En general se verifica que, para los casos a considerar, el grado de $P(x, n)$ es menor que el de $Q(x, n)$, y, por tanto, en cualquier intervalo acotado la condición es válida si n es suficientemente grande (recuérdese que $S(x) > 0$). Para el caso de intervalos no acotados es preciso que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\phi_0}^{\infty} \left| \frac{nP(x, n)}{Q(x, n)} \right| du < \infty.$$

Antes de continuar nuestro estudio de los ceros vamos a convencernos de que podemos utilizar, en vez de la solución exacta V su primera aproximación V_0 . Es decir, que el comportamiento de los ceros de ambas es prácticamente el mismo. Para ello nuevamente vamos a remitirnos al Teorema de comparación de Sturm. Sea $\omega = \max_{x \in I} |\delta(\phi)|$. Consideremos las ecuaciones:

$$U_-'' + (1 - \omega)U_- = 0, \quad U_+'' + (1 + \omega)U_+ = 0, \quad V'' + [1 + \delta(\phi)]V = 0.$$

Utilizando el Teorema de comparación de Sturm deducimos que entre dos ceros de U_- habrá, al menos, un cero de V y U_+ , y entre dos ceros de V habrá, al menos, un cero de U_+ . Pero las soluciones de U_+ y U_- son $A \text{sen}(\sqrt{1 \pm \omega} \phi + B)$, respectivamente. Además, cuando $|\delta(\phi)| \ll 1$, $\omega \ll 1$ ambas son prácticamente iguales y, por tanto, sus ceros tienen el mismo comportamiento. Todo ello nos indica que, en primera aproximación, podemos considerar que las propiedades espectrales de la función V y las de V_0 son prácticamente iguales y en el límite $n \rightarrow \infty$ ambas coinciden. Luego, la función $u(x)$, solución de la ecuación (3.8), es, en primera aproximación, igual a:

$$u(x) = \frac{C_1}{\sqrt[4]{S(x)}} \text{sen}(\phi(x) + C_2).$$

Ahora, ya estamos en condiciones de escribir la solución del problema planteado. Ante todo, notemos que $\frac{d\phi(x)}{dx} = \sqrt{S(x)} > 0$, o sea, la función $\phi(x)$ es una función creciente en I . Ordenemos los ceros de $u(x)$ en sentido creciente: $x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_\nu$ (suponemos que $u(x)$ tiene ν ceros y además como los ceros de $u(x)$ y los de $P_n(x)$ son los mismos, $\nu \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$). De la expresión anterior deducimos que los ceros x_k de $u(x)$ son tales que:

$$\phi(x_k) = k\pi - C_2, \quad k = 1, 2, \dots, \nu,$$

donde, sin pérdida de generalidad, hemos supuesto que $\phi(x_1) = \pi - C_2$. Esta relación nos indica que los ceros de $u(x)$ distan en π unidades unos de otros. Además, la función $N(x) = \frac{1}{\pi}\phi(x)$ tiene la propiedad:

$$N(x_{k+i}) - N(x_i) = k,$$

es decir $N(x)$ nos da el número de ceros acumulados de la función $u(x)$ y, por tanto, de $P_n(x)$ y tiene el sentido de una función de distribución. Luego, la densidad de la distribución de ceros de $P_n(x)$ en la aproximación semi-clásica o WKB la podemos expresar mediante la fórmula:

$$\rho_{WKB}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{S(x)}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Resumiendo todo lo visto en este apartado, tenemos que:

Teorema 9 Sean $S(x)$ y $\epsilon(x)$ las funciones (3.9) y (3.11)

$$S(x) = \frac{1}{4\tilde{\sigma}(x)^2} \left\{ 2\tilde{\sigma}(x)[2\tilde{\lambda}(x) - \tilde{\tau}'(x)] + \tilde{\tau}(x)[2\tilde{\sigma}'(x) - \tilde{\tau}(x)] \right\},$$

$$\delta(\phi) \equiv \epsilon(x) = \frac{1}{4[S(x)]^2} \left\{ \frac{5[S'(x)]^2}{4[S(x)]} - S''(x) \right\}.$$

Si $\epsilon(x) \ll 1^2$ entonces la aproximación semi-clásica ó WKB de la densidad de la distribución de ceros $\rho_n(x)$ (3.1) de las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden (3.3) es:

$$(3.12) \quad \rho_{WKB}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{S(x)}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

en cualquier intervalo I donde la función $S(x)$ sea positiva.

Existen condiciones bastante generales que nos aseguran que la aproximación WKB es una buena aproximación de la densidad de la distribución de ceros, lo cual es equivalente a que exista el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x - x_{n,k}) = \rho(x), \quad \text{para cierta } \rho(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

en el sentido de las distribuciones. Para más detalle véase [83, 86] y las referencias contenidas en las mismas.

Si queremos comparar esta distribución $\rho_{WKB}(x)$ con la real $\rho_n(x)$, es evidente que el candidato más adecuado para aproximar a $\rho_n(x)$ es la función $\frac{1}{n}\rho_{WKB}(x)$ pues el cociente $\frac{N(x)}{n}$ representa la proporción de los ceros menores que un x fijo.

Por comodidad vamos a definir la $\rho_{WKB}(x)$ de la siguiente forma equivalente:

$$(3.13) \quad \rho_{WKB}(x) = \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}(x)} \sqrt{2\tilde{\sigma}(x)[2\tilde{\lambda}(x) - \tilde{\tau}'(x)] + \tilde{\tau}(x)[2\tilde{\sigma}'(x) - \tilde{\tau}(x)]}.$$

²Ello es equivalente a exigir que $\sup_{x \in I} |\epsilon(x)| \ll 1$.

3.2 Los momentos a partir de la relación de recurrencia a tres términos.

Otra forma de atacar este problema consiste en explotar la relación, que gracias a la relación de recurrencia a tres términos (RRTT), existe entre las matrices tridiagonales de Jacobi y las familias de polinomios ortogonales [21, 75]. Las matrices de Jacobi son matrices simétricas de la forma:

$$J_{n+1} = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\alpha}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_0 & \bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{\alpha}_{n-1} & \bar{\beta}_n \end{pmatrix}.$$

Es conocido que dichas matrices de Jacobi están asociadas a una sucesión de polinomios ortonormales $\bar{P}_n(x)$, los cuales satisfacen una RRTT de la forma: $x\bar{P}_n(x) = \bar{\alpha}_n\bar{P}_{n+1}(x) + \bar{\beta}_n\bar{P}_n(x) + \bar{\alpha}_{n-1}\bar{P}_{n-1}(x)$. En este capítulo estamos estudiando el caso de los polinomios mónicos, que satisfacen una RRTT de la forma: $xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{n+1}P_n(x) + b_n^2P_{n-1}(x)$. La matriz asociada a dichos polinomios es una matriz tridiagonal (no simétrica) de la forma:

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0^2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1^2 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1}^2 & a_n \end{pmatrix}.$$

Para las dos normalizaciones anteriores tenemos $\bar{\beta}_n = a_n$ y $\bar{\alpha}_{n-1}^2 = b_n^2$. La conexión entre las matrices definidas anteriormente y los polinomios ortogonales es evidente pues cualquiera de las dos RRTT anteriores se puede escribir en la forma matricial:

$$x\vec{P}_n = M\vec{P}_n + P_{n+1}(x) \vec{e}_{n+1}^{(n+1)},$$

donde M denota las matrices J_{n+1} en el caso de los polinomios ortonormales \bar{P}_n o a T_{n+1} en el caso de los polinomios mónicos. En ambos casos, \vec{P}_n denota a los vectores $[\bar{P}_0(x), \bar{P}_1(x), \dots, \bar{P}_n(x)]^T$ y $[P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)]^T$, respectivamente. El vector $\vec{e}_j^{(n+1)}$ ($0 \leq j \leq n+1$), es el j -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} . Es evidente de la relación anterior que los autovalores de las matrices J_{n+1} y T_{n+1} son los mismos y coinciden con los ceros del polinomio $P_{n+1}(x)$.

El estudio de las propiedades medias de los autovalores de las matrices tridiagonales de Jacobi ha sido desarrollado por Dehesa en [24, 25, 26, 27, 29] y ofrece un método sencillo y eficaz para estudiar las propiedades de los ceros de las familias de polinomios ortogonales recuperando en muchos casos los resultados de los autores antes mencionados y muchos nuevos (como el caso de los momentos asintóticos de los polinomios de Hahn y Bessel).

Para estudiar las propiedades medias espectrales de los polinomios P_n definidos mediante (3.14) se puede utilizar el siguiente resultado [24, 29]

Lema 1 Sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios definidas mediante la relación de recurrencia

$$(3.14) \quad P_n(x) = (x - a_n)P_{n-1}(x) - b_{n-1}^2P_{n-2}(x)$$

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \quad n \geq 1$$

caracterizada por las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, y sean las cantidades $\mu_m^{(N)}$ definidas en (3.2) los momentos espectrales no normalizados a la unidad del polinomio $P_N(x)$, correspondientes a la densidad discreta de ceros (3.1). Entonces,

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \mu_m^{(N)} &= \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r_j, r'_{j+1}) \sum_{i=1}^{N-t} a_i^{r'_1} b_i^{2r_1} a_{i+1}^{r'_2} b_{i+1}^{2r_2} \dots b_{i+j-1}^{2r_j} a_{i+j}^{r'_{j+1}} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r_j, r'_{j+1}) \sum_{i=1}^{n-s} \left[\prod_{k=1}^{j+1} a_{i+k-1}^{r'_k} \right] \left[\prod_{k=1}^j (b_{i+k-1}^2)^{r'_k} \right], \quad m = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

donde $m = 1, 2, \dots, N$. La suma $\sum_{(m)}$ es la suma sobre todas las particiones $(r'_1, r_1, \dots, r'_{j+1})$ del número m tales que:

1. $R' + 2R = m$, donde R y R' se expresan mediante las expresiones $R = \sum_{i=1}^j r_i$ y $R' = \sum_{i=1}^{j-1} r'_i$, o, equivalentemente,

$$(3.16) \quad \sum_{i=1}^{j-1} r'_i + 2 \sum_{i=1}^j r_i = m$$

2. Si $r_s = 0$, $1 < s < j$, entonces $r_k = r'_k = 0$ para cada $k > s$ y
3. $j = \frac{m}{2}$ o $j = \frac{m-1}{2}$ si m es par o impar, respectivamente.

En la fórmula (3.15) el coeficiente F se define mediante la expresión

$$(3.17) \quad \begin{aligned} &F(r'_1, r_1, r'_2, \dots, r'_{p-1}, r_{p-1}, r'_p) = \\ &= m \frac{(r'_1 + r_1 - 1)!}{r'_1! r_1!} \left[\prod_{i=2}^{p-1} \frac{(r_{i-1} + r'_i + r_i - 1)!}{(r_{i-1} - 1)! r_i! r'_i!} \right] \frac{(r_{p-1} + r'_p - 1)!}{(r_{p-1} - 1)! r'_p!}, \end{aligned}$$

donde se supone que $r_0 = r_p = 1$ y que

$$F(r'_1, r_1, r'_2, r_2, \dots, r'_{p-1}, 0, 0) = F(r'_1, r_1, r'_2, r_2, \dots, r'_{p-1})$$

Además, en (3.15), t denota el número de las r_i diferentes de cero involucradas en cada partición de m .

La demostración del lema anterior se basa en el cálculo de los momentos mediante la expresión [24, 27]

$$\mu_m^{(N)} = \text{Tr}[M^m],$$

o sea, son la traza de las potencias correspondientes de la matriz M . Es fácil comprobar la veracidad de la fórmula para los primeros momentos ($m = 1, 2, 3$). No obstante, el caso general es mucho más complicado y su demostración la omitiremos [24, 25, 27]

Utilizando la fórmula (3.15) se obtienen las siguientes expresiones para los primeros tres momentos:

$$\begin{aligned}
 \mu'_1 &= \sum_{i=1}^N a_i, \\
 \mu'_2 &= \sum_{i=1}^N a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} b_i^2, \\
 \mu'_3 &= \sum_{i=1}^N a_i^3 + 3 \sum_{i=1}^{N-1} b_i^2 (a_i + a_{i+1}) \\
 \mu'_4 &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n a_i^4 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 (a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2 + \frac{1}{2} b_i^2) + 4 \sum_{i=1}^{n-2} b_i^2 b_{i+1}^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Recientemente, se ha descubierto [67, 41, 42, 54] que los momentos determinados en (3.15) se pueden representar en términos de los polinomios de Lucas de primera especie en varias variables, cada una de las cuales depende de los coeficientes de recurrencia (a_n, b_n) .

3.3 Distribución de ceros de los polinomios clásicos.

Consideremos primero el caso cuando los coeficientes de recurrencia a_n y b_n^2 definidos [29] por:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\sum_{i=0}^{\theta} c_i n^{\theta-i}}{\sum_{i=0}^{\beta} d_i n^{\beta-i}} \equiv \frac{Q_{\theta}(n)}{Q_{\beta}(n)}, & b_n^2 &= \frac{\sum_{i=0}^{\alpha} e_i n^{\alpha-i}}{\sum_{i=0}^{\gamma} f_i n^{\gamma-i}} \equiv \frac{Q_{\alpha}(n)}{Q_{\gamma}(n)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Supondremos que los parámetros que definen a a_n y b_n^2 son reales. Si, además, los e_i y f_i son tales que $b_n^2 > 0$, para $n \geq 1$, entonces, el teorema de Favard [21] nos asegura que estamos en presencia de una familia de polinomios ortogonales (caso definido positivo) $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ y entonces diremos que la relación (3.14) define una sucesión de polinomios ortogonales. A esta clase de polinomios pertenecen todos los polinomios clásicos, tanto continuos como discretos [4].

Teorema 10 (Dehesa)

Sea $\{P_k, k = 0, 1, \dots, n, \dots\}$ un sistema de polinomios definidos a partir de la relación de recurrencia (3.14), caracterizada por las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Sean ρ , ρ^* y ρ^{**} las densidades asintóticas de la distribución de los ceros del polinomio P_n definidas por

$$\begin{aligned}
 \rho(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x), & \rho^*(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \left(\frac{x}{n^{\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}} \right), \\
 \rho^{**}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \left(\frac{x}{n^{(\theta-\beta)}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

donde ρ_n viene dada por (3.1), y los momentos correspondientes a las funciones ρ , ρ^* , y ρ^{**} son

$$\mu'_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m^{I(N)}, \quad \mu''_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_m^{I(N)}}{n^{\frac{m}{2}(\alpha-\gamma)}}, \quad \mu'''_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_m^{I(N)}}{n^{m(\theta-\beta)}}.
 \tag{3.21}$$

Entonces, de acuerdo con el comportamiento asintótico de sus ceros, la familias de polinomios $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$, se pueden dividir en las siguientes siete clases:

1. Clase $\theta < \beta$ y $\alpha < \gamma$. La distribución de ceros de los polinomios pertenecientes a esta clase está caracterizada por las magnitudes

$$\mu'_0 = 1, \quad \mu'_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

2. Clase $\theta < \beta$ y $\alpha = \gamma$. Para los polinomios de esta clase se tiene que

$$\begin{cases} \mu'_{2m} = \left(\frac{e_0}{f_0}\right)^m \binom{2m}{m}, \\ \mu'_{2m+1} = 0, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

3. Clase $\theta \leq \beta$ y $\alpha > \gamma$. Los polinomios de esta clase son tales que

$$\begin{cases} \mu''_{2m} = \frac{1}{m(\alpha - \gamma) + 1} \left(\frac{e_0}{f_0}\right)^m \binom{2m}{m}, \\ \mu''_{2m+1} = 0, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

4. Clase $\theta = \beta$ y $\alpha < \gamma$. En este caso se tiene que

$$\mu'_m = \left(\frac{c_0}{d_0}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

5. Clase $\theta = \beta$ y $\alpha = \gamma$. Para los polinomios de esta clase se tiene que

$$\mu'_m = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\frac{c_0}{d_0}\right)^{m-2i} \left(\frac{e_0}{f_0}\right)^i \binom{2i}{i} \binom{m}{2i}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

6. Clase $\theta > \beta$ y $\alpha \leq \gamma$. Para los polinomios pertenecientes a esta clase se tiene que

$$\mu'''_m = \frac{1}{m(\theta - \beta) + 1} \left(\frac{c_0}{d_0}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

7. Clase $\theta > \beta$ y $\alpha > \gamma$. Aquí hay que distinguir tres casos:

(a) Caso $\theta - \beta > \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$. Los polinomios de esta subclase son tales que (véase el caso 6)

$$\mu'''_m = \frac{1}{m(\theta - \beta) + 1} \left(\frac{c_0}{d_0}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(b) Caso $\theta - \beta = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$. Para los polinomios de esta subclase se tiene que

$$\mu'''_m = \frac{1}{m(\theta - \beta) + 1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\frac{c_0}{d_0}\right)^{m-2i} \left(\frac{e_0}{f_0}\right)^i \binom{2i}{i} \binom{m}{2i}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(c) Caso $\theta - \beta < \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$. Los polinomios de esta subclase son tales que (véase el caso 3)

$$\begin{cases} \mu''_{2m} = \frac{1}{m(\alpha - \gamma) + 1} \left(\frac{e_0}{f_0}\right)^m \binom{2m}{m}, \\ \mu''_{2m+1} = 0, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

El teorema anterior caracteriza completamente a las familias de polinomios que satisfacen una relación de recurrencia a tres términos (3.14) cuyos coeficientes a_n y b_n^2 son funciones racionales de n (grado del polinomio). Como mencionamos anteriormente, este teorema fue probado en el ámbito de las matrices tridiagonales. Es importante destacar aquí que para su prueba sólo se precisa del lema 1 sin imponer ninguna condición adicional sobre los coeficientes de la relación de recurrencia. Este hecho será de importancia en los ejemplos a considerar.

Clasificación de los polinomios clásicos generalizados en función de sus propiedades espectrales medias

$$\begin{aligned} \theta < \beta & \begin{cases} \alpha < \gamma & (1) \\ \alpha = \gamma & (2) \end{cases} \\ \theta \leq \beta & \alpha > \gamma & (3) \\ \theta = \beta & \begin{cases} \alpha < \gamma & (4) \\ \alpha = \gamma & (5) \end{cases} \\ \theta > \beta & \begin{cases} \alpha \leq \gamma & (6) \\ \alpha > \gamma & \begin{cases} \theta - \beta > \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) & 7(a) \\ \theta - \beta = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) & 7(b) \\ \theta - \beta < \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) & 7(c) \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente, antes de pasar al caso “ q ”, vamos a enunciar otros dos teoremas importantes que aunque menos generales, complementen al anterior (aunque no aportan resultados nuevos) y son válidos en el caso de familias *infinitas* de polinomios ortogonales.

Teorema 11 (Nevai & Dehesa [58])

Sean \mathbb{R} y \mathbb{R}^+ el conjunto de los números reales y el de los reales positivos, respectivamente. Sea $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función no decreciente tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ dado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x+t)}{\phi(x)} = 1.$$

Supongamos, además, que existen dos números a y $b \geq 0$ tales que los coeficientes en la relación de recurrencia (3.14) satisfagan las relaciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\phi(n)} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\phi(n)} = \frac{b}{2}.$$

Entonces, para cada m natural

$$(3.22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_{nk}^m}{\int_0^n [\phi(t)]^m dt} = \sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]} b^{2j} a^{m-2j} 2^{-2j} \binom{2j}{j} \binom{m}{2j} = a^m {}_2F_1 \left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2} \mid \frac{b^2}{a^2} \right).$$

siendo x_{nk} los ceros del polinomio $P_n(x)$.

Una extensión del teorema anterior se debe a Van Assche [78] para funciones de variación regular de exponente α . Dicho teorema se puede formular como sigue:

Teorema 12 (Van Assche [78])

Sean \mathbb{R} y \mathbb{R}^+ el conjunto de los números reales y el de los reales positivos, respectivamente y sea $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de variación regular de exponente α , o sea, tal que para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $t \in \mathbb{R}^+$ se tiene que ³

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(xt)}{\phi(x)} = x^\alpha.$$

Supongamos, además, que existen ciertos números $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que los coeficientes en la relación de recurrencia (3.14) satisfacen las relaciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{\phi(2n)} = \gamma_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n-1}}{\phi(2n)} = \gamma_2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n}}{\phi(2n)} = \delta_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n-1}}{\phi(2n)} = \delta_2.$$

Entonces, para cualquier función continua y acotada f se tiene que

$$(3.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{nk}}{\phi(n)}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)|x - \gamma t^\alpha| I_B(x - \gamma t^\alpha)}{\sqrt{B^2 t^{2\alpha} - (x - \gamma t^\alpha)^2} \sqrt{(x - \gamma t^\alpha)^2 - A^2 t^{2\alpha}}} dx,$$

siendo x_{nk} los ceros del polinomio $P_n(x)$,

$$\gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}, \quad A = \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}, \quad B = \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2},$$

y

$$I_B(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-Bt^\alpha, -At^\alpha] \cup [At^\alpha, Bt^\alpha] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Utilizando el teorema anterior, Zarzo & Dehesa desarrollaron una clasificación de los polinomios ortogonales en función de su RRTT donde aparecen las funciones hipergeométricas de Lauricella [30, 82].

Un corolario inmediato del teorema anterior cuando $\gamma_1 = \gamma_2 = a$ y $\delta_1 = \delta_2 = \frac{b}{2} > 0$, es el siguiente [77, 78]

Teorema 13 (Van Assche [77, pag. 123])

Sean \mathbb{R} y \mathbb{R}^+ el conjunto de los números reales y el de los reales positivos, respectivamente. Sea $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de variación regular de exponente α , y supongamos que los coeficientes de la relación de recurrencia (3.14) son tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\phi(n)} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\phi(n)} = \frac{b}{2} > 0.$$

Entonces, para cualquier función continua y acotada f se tiene que

$$(3.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{nk}}{\phi(n)}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dt \int_{a-b}^{a+b} \frac{f(xt^\alpha)}{\sqrt{b^2 - (x-a)^2}} dx.$$

³Nótese que ello es equivalente a decir que $\phi(x) = x^\alpha \psi(x)$ con $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ y tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(xt)}{\psi(x)} = 1$.

Nótese que si escogemos en los dos teoremas anteriores la función $f(x) = x^m$, obtenemos sendas expresiones para los momentos $\mu_m^{(n)}$ correspondientes a la densidad de ceros (3.1). Nótese además que en el caso cuando $\alpha = 0$, (3.24) se simplifica obteniéndose

$$(3.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{nk}}{\phi(n)}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{a-b}^{a+b} \frac{f(x)}{\sqrt{b^2 - (x-a)^2}} dx,$$

de donde se deduce que,

$$\rho\left(\frac{x}{\phi(n)}\right) = \frac{1}{\pi \sqrt{b^2 - (x-a)^2}}.$$

En particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_{nk}}{\phi(n)}\right)^m = \frac{1}{\pi} \int_{a-b}^{a+b} \frac{x^m}{\sqrt{b^2 - (x-a)^2}} dx = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} b^{2j} a^{m-2j} 2^{-2j} \binom{2j}{j} \binom{m}{2j}.$$

3.4 Distribución de ceros de los q -polinomios.

El método anterior ha sido utilizado también en el caso de los q -polinomios [3, 28] donde se obtuvieron por primera vez resultados generales sobre los momentos asintóticos de los ceros para muchas de las familias clásicas de q -polinomios. Así, en [3] se consideró el problema de estudiar las propiedades medias y medias asintóticas de los q -polinomios ortogonales generalizados que satisficieran una relación de recurrencia a tres términos de la forma (3.14) y cuyos coeficientes a_n y b_{n-1}^2 estaban definidos por (q real y, sin pérdida de generalidad, mayor de 1)

$$(3.26) \quad a_n = \frac{\sum_{m=0}^A \left(\sum_{i=0}^{g_m} \alpha_i^{(m)} n^{g_m-i} \right) q^{d_m n}}{\sum_{m=0}^{A'} \left(\sum_{i=0}^{h_m} \beta_i^{(m)} n^{h_m-i} \right) q^{e_m n}} \equiv \frac{a_n^{num}}{a_n^{den}}$$

$$b_n^2 = \frac{\sum_{m=0}^B \left(\sum_{i=0}^{k_m} \theta_i^{(m)} n^{k_m-i} \right) q^{f_m n}}{\sum_{m=0}^{B'} \left(\sum_{i=0}^{l_m} \gamma_i^{(m)} n^{l_m-i} \right) q^{s_m n}} \equiv \frac{(b_n^{num})^2}{(b_n^{den})^2},$$

Esta relación de recurrencia es extremadamente general y en ella están contenidos todos los polinomios clásicos (tanto clásicos como los q -polinomios) mencionados en los apartados anteriores.

Si ahora le exigimos a los coeficientes de la relación de recurrencia las siguientes condiciones adicionales

1. los $\{\beta_i^{(m)}; 0 \leq i \leq h_m\}_{m=0}^{A'}$, $\{\gamma_i^{(m)}; 0 \leq i \leq l_m\}_{m=0}^{B'}$ no se anulan simultáneamente, o sea, a_n y b_n^2 están definidos para todo n ,
2. los $\{\theta_i^{(m)}; 0 \leq i \leq k_m\}_{m=0}^B$, $\{\gamma_i^{(m)}; 0 \leq i \leq l_m\}_{m=0}^{B'}$ son tales que $b_n^2 > 0$ para $n \geq 1$ —o sea, tiene lugar el ya mencionado teorema de Favard— es decir, la relación de recurrencia (3.14) tiene asociada una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)_q\}_{n=0}^N$,⁴ y

⁴Esta condición no es imprescindible que tenga lugar en general, no obstante para el caso que nos ocupa es válida.

3.

$$(3.27) \quad q^{d_0} > q^{d_1} > \dots > q^{d_A}; \quad q^{e_0} > q^{e_1} > \dots > q^{e_{A'}} \\ q^{f_0} > q^{f_1} > \dots > q^{f_B}; \quad q^{s_0} > q^{s_1} > \dots > q^{s_{B'}}$$

y

$$(3.28) \quad g_0 > g_1 > \dots > g_m; \quad h_0 > h_1 > \dots > h_m \\ k_0 > k_1 > \dots > k_m; \quad l_0 > l_1 > \dots > l_m$$

entonces se cumple el siguiente teorema ⁵

Teorema 14 Sea $P_N(x)_q$, con N suficientemente grande, un polinomio definido mediante las expresiones (3.14)-(3.28). Los momentos $\{\mu_m^{(N)}; m = 1, 2, \dots, N\}$ de la densidad no normalizada de los ceros $\rho_N(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_{N,i})$ del polinomio $P_N(x)_q$ tienen el siguiente comportamiento:

1. Si $d_0 - e_0 = \frac{1}{2}(f_0 - s_0) = 0$, aparecen los siguientes tres casos:

(a) Si $g_0 - h_0 > \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.29) \quad \mu_m^{(N)} \sim \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^m N^{(g_0 - h_0)m + 1}.$$

(b) Si $g_0 - h_0 = \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.30) \quad \mu_m^{(N)} \sim \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r'_{j+1}) \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^{R'} \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^R N^{\frac{1}{2}(k_0 - l_0)m + 1}.$$

(c) Si $g_0 - h_0 < \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.31) \quad \mu_m^{(N)} \sim \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^{\frac{m}{2}} N^{\frac{1}{2}(k_0 - l_0)m + 1}.$$

2. Si $d_0 - e_0 \neq 0$ y/o $f_0 - s_0 \neq 0$, pueden ocurrir los siguientes dos casos:

(a) Si $d_0 - e_0 \leq 0$ y $f_0 - s_0 \leq 0$, pueden ocurrir los siguientes tres subcasos:

i. Si $d_0 - e_0 < 0$ y $f_0 - s_0 < 0$ de forma que $\Omega_1 \neq 0$, entonces,

$$(3.32) \quad \mu_m^{(N)} \sim \sum_{(m)} \frac{F(r'_1, r_1, \dots, r'_{j+1})}{q^{-\Omega_2} (\ln q)^M} \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^{R'} \times \\ \times \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^R \frac{d^M}{d\Omega_1^M} \left(\frac{q^{\Omega_1}}{1 - q^{\Omega_1}} \right),$$

donde $\frac{d^M}{d\Omega_1^M}$ denota la M -ésima derivada respecto a Ω_1 .

⁵Estas dos series de desigualdades (3.27) y (3.28) evidentemente no son ninguna restricción o pérdida de generalidad del problema.

ii. Si $d_0 - e_0 = 0$ y $f_0 - s_0 < 0$ y $g_0 - h_0 = k_0 - l_0 = 0$, entonces,

$$(3.33) \quad \mu_m^{I(N)} \sim \sum_{(m)} F(r'_1, 0, \dots, 0, r'_{j+1}) \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^{R'} N.$$

iii. Si $d_0 - e_0 < 0$ y $f_0 - s_0 = 0$ y $g_0 - h_0 = k_0 - l_0 = 0$, entonces,

$$(3.34) \quad \mu_m^{I(N)} \sim \sum_{(m)} F(0, r_1, \dots, r_j, 0) \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^R N.$$

(b) Si $d_0 - e_0 > 0$ y/o $f_0 - s_0 > 0$, los siguientes tres subcasos tienen lugar:

i. Si $d_0 - e_0 > \frac{1}{2}(f_0 - s_0)$, entonces,

$$(3.35) \quad \mu_m^{I(N)} \sim \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^m \frac{q^{m(N+1)(d_0-e_0)}}{q^{m(d_0-e_0)} - 1} N^{(g_0-h_0)m}.$$

ii. Si $d_0 - e_0 = \frac{1}{2}(f_0 - s_0)$. Entonces, tres diferentes situaciones pueden ocurrir.

A. Si $g_0 - h_0 > \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.36) \quad \mu_m^{I(N)} \sim \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^m \frac{q^{m(N+1)(d_0-e_0)}}{q^{m(d_0-e_0)} - 1} N^{(g_0-h_0)m}.$$

B. Si $g_0 - h_0 = \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.37) \quad \mu_m^{I(N)} \sim \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r'_{j+1}) \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^{R'} \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^R \times \\ \times \frac{q^{\Omega_2 + m(N+1-t)(d_0-e_0)}}{q^{m(d_0-e_0)} - 1} N^{m(g_0-h_0)}.$$

C. Si $g_0 - h_0 < \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.38) \quad \mu_m^{I(N)} \sim \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^{\frac{m}{2}} \frac{q^{(d_0-e_0)mN}}{q^{(d_0-e_0)m} - 1} N^{\frac{1}{2}(k_0-l_0)m}.$$

iii. $d_0 - e_0 < \frac{1}{2}(f_0 - s_0)$. Entonces,

$$(3.39) \quad \mu_m^{I(N)} \sim \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^{\frac{m}{2}} \frac{q^{\frac{1}{2}(f_0-s_0)mN}}{q^{\frac{1}{2}(f_0-s_0)m} - 1} N^{\frac{1}{2}(f_0-s_0)m}.$$

La suma $\sum_{(m)}$ y el parámetro t están definidos como en el Lema 1. Además, los parámetros Ω_1 , Ω_2 y M están definidos mediante las expresiones:

$$(3.40) \quad \Omega_1 = [(d_0 - e_0) - \frac{1}{2}(f_0 - s_0)]R' + \frac{m}{2}(f_0 - s_0),$$

$$(3.41) \quad \Omega_2 = (d_0 - e_0) \sum_{k=1}^j kr'_{k+1} + (f_0 - s_0) \sum_{k=1}^{j-1} kr_{k+1},$$

$$(3.42) \quad M = [(g_0 - h_0) - \frac{1}{2}(k_0 - l_0)]R' + \frac{m}{2}(k_0 - l_0).$$

También a partir de la RRTT (3.14) con coeficientes (3.26) se pueden estudiar [3] las propiedades medias asintóticas de los q -polinomios, las cuales se deducen del teorema anterior. Además, como consecuencia del teorema anterior se obtiene una clasificación de los q -polinomios generalizados en función de sus propiedades espectrales medias obtenidas a partir de los coeficientes de la relación de recurrencia (3.14) que éstos satisfacen.

Clasificación de los q -polinomios generalizados en función de sus propiedades espectrales medias

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left. \begin{array}{l} d_0 - e_0 = \\ \frac{1}{2}(f_0 - s_0) \end{array} \right\} \begin{cases} (a) \ g_0 - h_0 > \frac{1}{2}(k_0 - l_0) \\ (b) \ g_0 - h_0 = \frac{1}{2}(k_0 - l_0) \\ (c) \ g_0 - h_0 < \frac{1}{2}(k_0 - l_0) \end{cases} \\
 2. \quad & \left. \begin{array}{l} d_0 - e_0 \neq 0 \\ f_0 - s_0 \neq 0 \end{array} \right\} \begin{cases} (a) \ \begin{array}{l} d_0 - e_0 \leq 0 \\ f_0 - s_0 \leq 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (i) \ \begin{cases} d_0 - e_0 < 0 \\ f_0 - s_0 < 0 \end{cases} \quad \Omega_1 \neq 0 \\ (ii) \ \begin{cases} d_0 - e_0 = 0 \\ f_0 - s_0 < 0 \end{cases} \quad g_0 - h_0 = k_0 - l_0 = 0 \\ (iii) \ \begin{cases} d_0 - e_0 < 0 \\ f_0 - s_0 = 0 \end{cases} \quad g_0 - h_0 = k_0 - l_0 = 0 \end{array} \\ (b) \ \begin{array}{l} d_0 - e_0 > 0 \\ \text{y/o} \\ f_0 - s_0 > 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (i) \ d_0 - e_0 > \frac{1}{2}(f_0 - s_0) \\ (ii) \ d_0 - e_0 = \frac{1}{2}(f_0 - s_0) \left\{ \begin{array}{l} A) \ g_0 - h_0 > \frac{1}{2}(k_0 - l_0) \\ B) \ g_0 - h_0 = \frac{1}{2}(k_0 - l_0) \\ C) \ g_0 - h_0 < \frac{1}{2}(k_0 - l_0) \end{array} \right. \\ (iii) \ d_0 - e_0 < \frac{1}{2}(f_0 - s_0) \end{array} \end{cases}
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pasemos ahora a estudiar las correspondientes densidades asintóticas.

En este punto debemos hacer la siguiente importante observación. Para obtener la mayor información posible acerca de la distribución asintótica de los ceros del polinomio $P_N(x)_q$ cuando los momentos μ'_m de la densidad *convencional* de los ceros $\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x)$ divergen se introduce un factor de normalización D , o sea, se define la densidad asintótica de los ceros del polinomio $P_N(x)_q$ de la forma:

$$(3.43) \quad f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} C \rho_N(Dx).$$

donde los factores C y D son tales que los momentos μ_m de $f(x)$, expresados mediante la fórmula:

$$(3.44) \quad \mu_m = \lim_{N \rightarrow \infty} C D^m \mu_m^{(N)},$$

sean finitos [46, pág. 68]. En esto radica la gran utilidad de las densidades del tipo $f(x)$. Además, el factor de escala D deberá ser una función de N y/o q^N .

Un análisis del teorema 14 nos indica que los momentos $\mu_m^{(N)}$ de la densidad (no normalizada) de los ceros $\rho_N(x)$ dependen de N de la siguiente forma:

$$(3.45) \quad \begin{array}{ll} N^{am+1} & \text{en el caso 1,} \\ Constante & \text{en los subcasos 2(a)i,} \\ N & \text{en los subcasos 2(a)ii-2(a)iii,} \\ N^{am} q^{bmN} & \text{en el caso 2b,} \end{array}$$

donde las constantes a y b son conocidas y distintas en cada caso. Por ello, es evidente la necesidad de definir una densidad *normalizada* de ceros $\rho_N^{norm}(x)$. La normalización más común es imponer que el *momento de orden cero* sea igual a 1, lo que nos conduce a la expresión para la densidad de ceros:

$$(3.46) \quad \rho_N^{norm}(x) = \frac{1}{N} \rho_N(x),$$

cuyos momentos $\tilde{\mu}'_m^{(N)}$ están relacionados con los correspondientes momentos de $\rho_N(x)$ mediante la fórmula:

$$(3.47) \quad \tilde{\mu}'_m^{(N)} = \frac{1}{N} \mu'_m{}^{(N)}, \quad m \geq 0.$$

Es claro de (3.45) y (3.47) que la dependencia en N de los momentos de la densidad de ceros *normalizada a la unidad* vendrá dada por:

$$(3.48) \quad \begin{array}{ll} N^{am} & \text{en el caso 1,} \\ N^{-1} & \text{en los subcasos 2(a)i,} \\ \text{Constante} & \text{en los subcasos 2(a)ii-2(a)iii,} \\ N^{am-1} q^{bmN} & \text{en el caso 2b,} \end{array}$$

Como ya hemos dicho anteriormente, estamos interesados en la densidad asintótica de los ceros. Si definimos dicha densidad de la forma:

$$(3.49) \quad \rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x),$$

entonces, teniendo en cuenta que $\mu_m{}^{(N)}$ depende de N de la forma (3.45), sus correspondientes momentos μ'_m definidos por:

$$\mu'_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu'_m{}^{(N)},$$

tenderán a infinito en el caso 1, los subcasos 2(a)ii y 2(a)iii y el caso 2b; y a una constante dada por (3.32) en el subcaso 2(a)i.

Si queremos obtener mayor información acerca de densidad asintótica de los ceros en los casos 1, subcasos 2(a)ii y 2(a)iii y el caso 2b, debemos introducir, como ya hemos dicho anteriormente, un factor de normalización y/o de escala para la densidad $\rho_N(x)$ (fórmulas (3.43) y (3.44)). Estudiemos la densidad *reescalada*. Para el caso 1 ningún factor de escala D , excepto $D = N^{-a - \frac{1}{m}}$, nos da una densidad cuyos correspondientes momentos sean no nulos y finitos, pero este factor no nos interesa pues depende del orden del momento m y, por tanto, deberíamos definir una densidad asintótica diferente para cada momento. Sin embargo, para el caso 2b podemos considerar el factor de escala $D = N^{-a} q^{-bN}$ y definir la densidad discreta de ceros de la forma:

$$\rho_N^{**}(x) = \rho_N \left(\frac{x}{q^{bN} N^a} \right),$$

y la densidad asintótica

$$(3.50) \quad \rho^{**}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N \left(\frac{x}{q^{bN} N^a} \right),$$

cuyos momentos μ_m^{**} son, de acuerdo con (3.44), de la forma:

$$(3.51) \quad \mu_m^{**} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_m{}^{(N)}}{q^{mbN} N^{am}}.$$

De (3.45) y (3.51), está claro que todos los μ_m^{**} son finitos. Ahora, sólo nos resta escoger los correspondientes parámetros a y b para los diferentes subcasos de 2b. Siguiendo este razonamiento se demuestran los siguientes tres teoremas que nos dan las expresiones asintóticas buscadas.

Teorema 15 Sea $P_N(x)_q$ un polinomio definido como en el teorema 14 con la condición adicional $(d_0 - e_0) = \frac{1}{2}(f_0 - s_0) = 0$. (O sea, el caso 1)

Sean $\rho(x)$, $\rho_1^*(x)$ y $\rho_2^*(x)$ las densidades asintóticas (o sea, cuando $N \rightarrow \infty$) de los ceros del polinomio $P_N(x)_q$ definidas por:

$$(3.52) \quad \begin{aligned} \rho(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x), \\ \rho_1^*(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \rho_N \left(\frac{x}{N(g_0 - h_0)} \right), \\ \rho_2^*(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \rho_N \left(\frac{x}{N^{\frac{1}{2}}(k_0 - l_0)} \right), \end{aligned}$$

y sus correspondientes momentos:

$$(3.53) \quad \begin{aligned} \mu'_m &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_m^{(N)}, \\ \mu_m^*(1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_m^{(N)}}{N^{(g_0 - h_0)m}}, \\ \mu_m^*(2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_m^{(N)}}{N^{(k_0 - l_0)\frac{m}{2}}}, \end{aligned}$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$ respectivamente. En adelante denotaremos por $\rho_N(x)$ la densidad discreta de los ceros del polinomio $P_N(x)_q$. Entonces,

$$(3.54) \quad \mu'_m = \infty, \quad m \geq 0,$$

y

1. Si $g_0 - h_0 > \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.55) \quad \mu_m^*(1) = \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^m, \quad m \geq 0.$$

2. Si $g_0 - h_0 = \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.56) \quad \mu_m^*(2) = \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r'_{j+1}) \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^{R'} \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^R, \quad m \geq 0.$$

3. Si $g_0 - h_0 < \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces,

$$(3.57) \quad \mu_m^*(2) = \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^{\frac{m}{2}}, \quad m \geq 0.$$

Los coeficientes F y el símbolo $\sum_{(m)}$ están definidos como en el teorema 14.

Teorema 16 Sea $P_N(x)_q$ un polinomio definido como en el teorema 14 con la condición adicional $(d_0 - e_0) \leq 0$ y $\frac{1}{2}(f_0 - s_0) \leq 0$. (O sea, el subcaso 2a)

Sean $\rho(x)$ y $\rho_1(x)$ las densidades asintóticas de los ceros del polinomio $P_N(x)_q$ definidas por:

$$(3.58) \quad \rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x); \quad \rho_1(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \rho_N(x),$$

y sus correspondientes momentos:

$$(3.59) \quad \mu'_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_m^{(N)}; \quad \mu'_m(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_m^{(N)}}{N},$$

para $m \geq 0$, respectivamente. Entonces,

1. Si $d_0 - e_0 < 0$ y $f_0 - s_0 < 0$ de forma que $\Omega_1 \neq 0$, entonces,

$$(3.60) \quad \mu'_m = \sum_{(m)} \frac{F(r'_1, r_1, \dots, r'_{j+1})}{q^{-\Omega_2} (\ln q)^M} \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^{R'} \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^R \frac{d^M}{d\Omega_1^M} \left(\frac{q^{\Omega_1}}{1 - q^{\Omega_1}} \right),$$

$$(3.61) \quad \mu'_0(1) = 1, \quad \mu'_m(1) = 0, \quad m \geq 1.$$

2. Si $d_0 - e_0 = 0$ y $f_0 - s_0 < 0$ y $g_0 - h_0 = k_0 - l_0 = 0$, entonces,

$$(3.62) \quad \mu'_m = \infty, \quad m \geq 0.$$

$$(3.63) \quad \mu'_m(1) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ \sum_{(m)} F(r'_1, 0, \dots, 0, r'_{j+1}) \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^{R'} & m \geq 1. \end{cases}$$

3. Si $d_0 - e_0 < 0$ y $f_0 - s_0 = 0$ y $g_0 - h_0 = k_0 - l_0 = 0$, entonces,

$$(3.64) \quad \mu'_m = \infty, \quad m \geq 0.$$

$$(3.65) \quad \mu'_m(1) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ \sum_{(m)} F(0, r_1, 0, \dots, r_j, 0) \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^R & m \geq 1. \end{cases}$$

Los coeficientes F , el símbolo $\sum_{(m)}$ y los parámetros Ω_1 , Ω_2 y M están definidos como en el teorema 14.

Teorema 17 Sea $P_N(x)_q$ un polinomio definido como en el teorema 14 con la condición adicional $(d_0 - e_0) > 0$ y/o $\frac{1}{2}(f_0 - s_0) > 0$. (O sea, el subcaso 2b)

Sean $\rho(x)$, $\rho_1^{**}(x)$, $\rho_2^{**}(x)$, $\rho_3^{**}(x)$, $\rho_1^{++}(x)$, $\rho_2^{++}(x)$ y $\rho_3^{++}(x)$ las densidades asintóticas de los ceros del polinomio $P_N(x)_q$ definidas por:

$$(3.66) \quad \rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x),$$

$$(3.67) \quad \begin{aligned} \rho_1^{**}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N \left(\frac{xq^{-(d_0-e_0)N}}{N(g_0-h_0)} \right), \\ \rho_2^{**}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N \left(\frac{xq^{-(d_0-e_0)N}}{N^{\frac{1}{2}}(k_0-l_0)} \right), \\ \rho_3^{**}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N \left(\frac{xq^{-\frac{1}{2}(f_0-s_0)N}}{N^{\frac{1}{2}}(k_0-l_0)} \right), \end{aligned}$$

$$(3.68) \quad \begin{aligned} \rho_1^{++}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[m; q]}{[mN; q]} \rho_N \left(\frac{xq^{-(d_0-e_0-1)N}}{N(g_0-h_0)} \right), \\ \rho_2^{++}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[m; q]}{[mN; q]} \rho_N \left(\frac{xq^{-(d_0-e_0-1)N}}{N^{\frac{1}{2}}(k_0-l_0)} \right), \\ \rho_3^{++}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[m; q]}{[mN; q]} \rho_N \left(\frac{xq^{-\frac{1}{2}(f_0-s_0-2)N}}{N^{\frac{1}{2}}(k_0-l_0)} \right), \end{aligned}$$

y sus correspondientes momentos:

$$(3.69) \quad \mu'_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_m^{I(N)},$$

$$(3.70) \quad \begin{aligned} \mu_m^{**}(1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_m^{I(N)}}{N(g_0-h_0)q^{(d_0-e_0)mN}}, \\ \mu_m^{**}(2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_m^{I(N)}}{N^{\frac{1}{2}}(k_0-l_0)q^{(d_0-e_0)mN}}, \\ \mu_m^{**}(3) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_m^{I(N)}}{N^{\frac{1}{2}}(k_0-l_0)q^{\frac{1}{2}(f_0-s_0)mN}}, \end{aligned}$$

$$(3.71) \quad \begin{aligned} \mu_m^{++}(1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[m; q]}{[mN; q]} \frac{\mu_m^{I(N)}}{N(g_0-h_0)q^{(d_0-e_0-1)mN}}, \\ \mu_m^{++}(2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[m; q]}{[mN; q]} \frac{\mu_m^{I(N)}}{N^{\frac{1}{2}}(k_0-l_0)q^{(d_0-e_0-1)mN}}, \\ \mu_m^{++}(3) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[m; q]}{[mN; q]} \frac{\mu_m^{I(N)}}{N^{\frac{1}{2}}(k_0-l_0)q^{\frac{1}{2}(f_0-s_0-2)mN}}, \end{aligned}$$

para $m \geq 0$, respectivamente, y donde $[n; q]$ denota el q -número ⁶

$$(3.72) \quad [n; q] = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Entonces,

$$(3.73) \quad \mu'_m = \infty, \quad m \geq 0$$

y

1. $d_0 - e_0 > \frac{1}{2}(f_0 - s_0)$. Entonces,

$$(3.74) \quad \mu_m^{**}(1) = \begin{cases} \infty & m = 0 \\ \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^m \frac{q^{m(d_0-e_0)}}{q^{m(d_0-e_0)} - 1} & m \geq 1. \end{cases}$$

⁶No confundir con el q -número $[n]_q = \frac{q^{\frac{n}{2}-q-\frac{n}{2}}}{\kappa_q}$ definido en el capítulo anterior.

Además,

$$(3.75) \quad \mu_m^{++}(1) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ (q^m - 1)\mu_m^{**}(1) & m \geq 1. \end{cases}$$

2. Si $d_0 - e_0 = \frac{1}{2}(f_0 - s_0)$. Entonces, pueden ocurrir los siguientes tres casos:

(a) $g_0 - h_0 > \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$, entonces, los momentos $\mu_m^{**}(1)$ y $\mu_m^{++}(1)$ coinciden con los del caso anterior, o sea, se expresan mediante las fórmulas (3.74) y (3.75).

(b) $g_0 - h_0 = \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$. Entonces,

$$(3.76) \quad \mu_m^{**}(1) = \begin{cases} \infty & m = 0 \\ \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r'_{j+1}) \left[\frac{\alpha_0^{(0)}}{\beta_0^{(0)}} \right]^{R'} \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^R \frac{q^{\Omega_2 + m(1-t)(d_0 - e_0)}}{q^{m(d_0 - e_0)} - 1} & m \geq 1 \end{cases}$$

Además,

$$(3.77) \quad \mu_m^{++}(1) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ (q^m - 1)\mu_m^{**}(1) & m \geq 1. \end{cases}$$

(c) $g_0 - h_0 < \frac{1}{2}(k_0 - l_0)$. Entonces,

$$(3.78) \quad \mu_m^{**}(2) = \begin{cases} \infty & m = 0 \\ \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^{\frac{m}{2}} \frac{1}{q^{(d_0 - e_0)m} - 1} & m \geq 1. \end{cases}$$

Además,

$$(3.79) \quad \mu_m^{++}(2) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ (q^m - 1)\mu_m^{**}(2) & m \geq 1 \end{cases}$$

3. $d_0 - e_0 < \frac{1}{2}(f_0 - s_0)$. Entonces,

$$(3.80) \quad \mu_m^{**}(3) = \begin{cases} \infty & m = 0 \\ \left[\frac{\theta_0^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} \right]^{\frac{m}{2}} \frac{1}{q^{\frac{1}{2}(f_0 - s_0)m} - 1} & m \geq 1 \end{cases}$$

Además,

$$(3.81) \quad \mu_m^{++}(3) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ (q^m - 1)\mu_m^{**}(3) & m \geq 1. \end{cases}$$

Los coeficientes F , el símbolo $\sum_{(m)}$ y los parámetros Ω_1 , Ω_2 y M están definidos como en el teorema 14.

Es evidente que este método, aunque siendo muy general, es bastante laborioso a la hora calcular explícitamente los momentos exactos y asintóticos. Por ello, existen otras técnicas alternativas que, en muchos casos, permiten obtener expresiones más sencillas. Una revisión exhaustiva del tema hasta el año 1991 se puede encontrar en [82].

4 Aplicaciones.

En este apartado consideraremos algunas familias de polinomios ortogonales mónicos y estudiaremos sus propiedades espectrales utilizando los distintos métodos antes descritos.

4.1 Polinomios de Jacobi y Laguerre

Escojamos la la función asociada a la distribución beta en $[-1, 1]$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $d\alpha(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$, es una distribución absolutamente continua. A los polinomios ortogonales asociados a la distribución anterior se le denominan Polinomios de Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}$. Es decir, los Polinomios de Jacobi son los polinomios que satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = \delta_{mn} \frac{2^{\alpha+\beta+2n+1} n! \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1) (2n+\alpha+\beta+1) (n+\alpha+\beta+1) \frac{2}{n}}.$$

Si ahora en consideramos la distribución gamma

$$\alpha(x) = \begin{cases} \int_0^x t^\alpha e^{-t} dt & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces estamos en presencia de los polinomios ortogonales de Laguerre L_n^α , los cuales satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = \delta_{mn} \Gamma(n+\alpha+1) n!.$$

4.1.1 Densidad WKB

Comenzaremos calculando la densidad asintótica de los ceros mediante la aproximación WKB para los polinomios de Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}(x)$. Para ello utilizamos la ecuación diferencial de segundo orden (3.3), donde

$$\tilde{\sigma}(x) = (1-x^2), \quad \tilde{\tau}(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x, \quad \tilde{\lambda}_n = n(n + \alpha + \beta + 1).$$

Luego, (3.12) nos conduce a la expresión:

$$\begin{aligned} \rho_{wkb}^J(x) &= \\ &= \frac{\sqrt{n^2(4-4x^2) + 4n(1+\alpha+\beta)(1-x^2) + 4-\alpha^2(1+x)^2 - 2\alpha(1+\beta)(x^2-1) - \beta(\beta-2\beta x-2+(\beta+2)x^2)}}{\pi(1-x^2)}. \end{aligned}$$

En el caso particular de los polinomios de Legendre $P_n(x) \equiv P_n^{0,0}(x)$, tenemos

$$\rho_{wkb}(x) = \frac{\sqrt{1+n(1+n)(1-x^2)}}{\pi(1-x^2)}.$$

Obviamente, en ambos casos, cuando n tiende a infinito obtenemos el resultado clásico [35]

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \rho_{wkb}^J(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Pasemos a considerar el caso de los polinomios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$. Para dichos polinomios tenemos

$$\tilde{\sigma}(x) = x, \quad \tilde{\tau}(x) = \alpha + 1 - x, \quad \tilde{\lambda}_n = n.$$

Luego, (3.12) nos conduce a la expresión:

$$\rho_{wkb}^L(x) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2+2x+2\alpha x+4nx-x^2}}{2\pi x}.$$

Nótese que si ahora hacemos el cambio, $x = ny$, la expresión anterior se convierte en

$$\rho_{wkb}^L(ny) = \frac{\sqrt{(4-y)y^{-1} + \frac{1-\alpha^2+2ny(\alpha+1)y}{n^2y^2}}}{2\pi}.$$

Luego, tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos la siguiente expresión clásica [16, 27, 40, 58, 85] para la densidad de los ceros⁷

$$(4.2) \quad \rho_{wkb}^L(y) = \frac{1}{2\pi} (4-y)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < y < 4.$$

4.1.2 Densidad asintótica a partir de la relación de recurrencia

Polinomios de Jacobi

Como los polinomios de Jacobi satisfacen una relación de recurrencia a tres términos, también podemos echar mano de los teoremas 10 11, 12 y En efecto, como para los polinomios de Jacobi los coeficientes a_n y b_n^2 de la relación de recurrencia (3.14) se expresan mediante las fórmulas

$$(4.3) \quad a_{n+1} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n - 2 + \alpha + \beta)},$$

$$b_n^2 = \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)},$$

y por tanto,

$$a_n = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{4n^4 + O(n)}, \quad b_n^2 = \frac{4n^4 + O(n^3)}{16n^4 + O(n^3)}.$$

Luego, el teorema 10 nos indica que estamos en presencia de una familia de polinomios de la clase 2 con los parámetros $\theta = 0$, $\beta = 2$, $\alpha = \gamma = 4$, y $(e_0, f_0) = (4, 16)$. Por tanto, los momentos asintóticos de la densidad ρ de la distribución de ceros se expresa por

$$(4.4) \quad \begin{cases} \mu'_{2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \binom{2m}{m}, & m = 0, 1, 2, \dots \\ \mu'_{2m+1} = 0, \end{cases}$$

y se corresponden con la expresión (4.1) obtenida anteriormente.⁸

⁷Recuérdese que $y = \frac{x}{n}$.

⁸En este caso estamos en presencia de un problema de momentos determinado (intervalo acotado)

Utilicemos ahora el teorema 11. En este caso, escogemos $\phi(n) = 1$, por tanto $a = 0$, $b = 1$, luego el teorema 11 nos conduce a la expresión

$$(4.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{nk}^m = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} b^{2j} a^{m-2j} 2^{-2j} \binom{2j}{j} \binom{m}{2j} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \binom{2k}{k}, & m = 2k \\ 0, & m = 2k + 1 \end{cases}$$

que coincide con (4.4). Para concluir, nótese que el teorema 12, o su corolario 13, nos conducen a idéntico resultado. Para ello basta escoger la función $\phi(n) = 1$ (luego $\alpha = 0$), $a = 0$, $b = 1$, por lo que 13 nos conduce a

$$(4.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_{nk}}{\phi(n)} \right)^m = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dt \int_{-1}^1 \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \binom{2k}{k}, & m = 2k \\ 0, & m = 2k + 1 \end{cases}$$

Como hemos visto, los cuatro teoremas conducen, como era de esperar, al mismo resultado.

Finalmente, para calcular los momentos espectrales para cada n podemos utilizar cualquiera de los métodos aquí descritos, o bien a partir de la ecuación diferencial (3.3), mediante las expresiones (3.7) y (3.4), o bien a partir de la ecuación de recurrencia, es decir utilizando (3.15). Ello nos conduce a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mu_1^{(n)} &= \frac{\beta - \alpha}{2n + \alpha + \beta}, \\ \mu_2^{(n)} &= \frac{4n^3 + 4n^2(\alpha + \beta - 1) + 2n((\alpha - 2)\alpha + (\beta - 2)\beta) + (\alpha + \beta)(\alpha^2 + (\beta - 1)\beta - \alpha(1 + 2\beta))}{(2n - 1 + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta)^2}, \\ \mu_3 &= -\frac{1}{(-2 + 2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^3} \times \\ &\times \left[(\alpha - \beta)(16n^4 + 4n^2(\alpha + \beta - 2)(4\alpha + 4\beta - 1) + 4n^3(7\alpha + 7\beta - 6) + \right. \\ &\left. + (\alpha + \beta)^2(2 + (\alpha - 3)\alpha - 3\beta - 2\alpha\beta + \beta^2) + 2n(\alpha + \beta)(4 + \alpha(2\alpha - 9) - 9\beta + 2\alpha\beta + 2\beta^2)) \right]. \end{aligned}$$

Polinomios de Laguerre

Consideremos ahora los polinomios de Laguerre. En este caso los coeficientes a_n y b_n^2 de la relación de recurrencia (3.14) se expresan mediante las fórmulas

$$(4.7) \quad a_{n+1} = 2n + \alpha - 1, \quad b_n^2 = n(n + \alpha).$$

Luego, pertenecen a la clase 7b descrita en el teorema 10 con parámetros $\theta = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = 2$, $\gamma = 0$, y $(c_0, d_0) = (2, 1)$, $(e_0, f_0) = (1, 1)$, respectivamente y sus momentos espectrales asintóticos son

$$(4.8) \quad \mu_m''' = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} 2^{m-2i} \binom{2i}{i} \binom{m}{2i} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

que caracterizan un caso especial de la distribución Beta [45, Vol. 2, p. 210]. Concretamente,

$$(4.9) \quad \rho\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(4 - \frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \frac{x}{n} \leq 4,$$

y coincide con (4.2). Obviamente si utilizamos el teorema 11 obtenemos el mismo resultado. Para ello basta utilizar como función $\phi(n) = n$ y notar que entonces $a = b = 2$. Por último, si utilizamos el teorema 13, tenemos que

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_{nk}}{\phi(n)}\right)^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 dt \int_0^4 \frac{x^m t^m}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\pi(m+1)} \int_0^4 \frac{x^m}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} dx = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} 2^{m-2i} \binom{2i}{i} \binom{m}{2i}, \end{aligned}$$

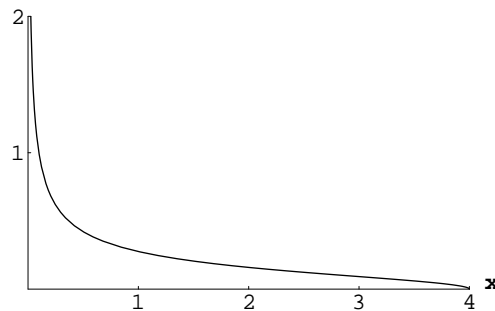
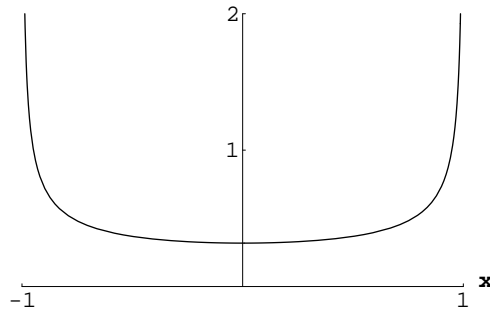
que coincide con (4.8).

Finalmente, para los momentos espectrales de los polinomios de Laguerre las ecuaciones (3.7) y (3.4), o (3.15) nos conducen a

$$\mu_1^{(n)} = n + \alpha, \quad \mu_2^{(n)} = (n + \alpha) (2n + \alpha - 1),$$

$$\mu_3^{(n)} = (n + \alpha) (5n^2 + n(5\alpha - 6) + \alpha^2 - 3\alpha + 2),$$

$$\mu_4^{(n)} = (n + \alpha) (14n^3 + n^2(21\alpha - 29) + n(\alpha - 2)(9\alpha - 11) + (\alpha - 3)(\alpha - 2)(\alpha - 1)).$$



Densidad de ceros de los Polinomios de Jacobi y Laguerre.

4.2 Polinomios de Charlier y Chebyshev

Pasemos a considerar el caso discreto. Aquí claramente sólo podemos utilizar el método a partir de la relación de recurrencia pues no tenemos ninguna ecuación diferencial. Estudiemos los polinomios de Charlier y Chebyshev respectivamente.

Si a diferencia del apartado anterior, consideramos ahora que $\alpha(x)$ es una función escalón con saltos de magnitud $\rho(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{\Gamma(x+1)}$, en los puntos $x = 0, 1, 2, \dots$, entonces, estamos en presencia de una familia de polinomios ortogonales que satisfacen una relación de ortogonalidad discreta, es decir se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_n^\mu(x)c_m^\mu(x)d\alpha(x) = \sum_{x=0}^{\infty} c_n^\mu(x)c_m^\mu(x)\frac{e^{-\mu}\mu^x}{\Gamma(x+1)} = \delta_{mn}n!\mu^n$$

A los miembros de dicha familia se le denominan polinomios de Charlier ⁹ que son solución de una ecuación en diferencias de la forma (2.9), concretamente

$$x \Delta \nabla y(x) + \mu - x \Delta y(x) + ny(x) = 0.$$

Un caso muy distinto se tiene al tomar $\alpha(x)$ como una función escalón con saltos unitarios en N puntos, digamos $x = 0, 1, 1., N - 1$. Este caso corresponde una familia finita de polinomios conocida como polinomios discretos de Chebyshev $t_n(x, N)$ y que son el análogo discreto de los ya mencionados polinomios de Legendre. En este caso tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_n(x, N)t_m(x, N)d\alpha(x) = \sum_{x=0}^{n-1} t_n(x, N)t_m(x, N) = \delta_{mn} \frac{n!^2(N+n)!(n+1)_n^{-2}}{(2n+1)(N-n-1)!}.$$

Polinomios de Charlier

En el primer caso tenemos que los polinomios de Charlier $c_n^\mu(x)$, satisfacen una relación de recurrencia a tres términos (3.14) cuyos coeficientes a_n y b_n^2 son:

$$(4.11) \quad a_n = n + \mu - 1, \quad b_n^2 = n\mu.$$

Luego son representantes de la clase 7a descrita en el teorema 10 con $\theta = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ y $(c_0, e_0) = (1, 1)$. Por tanto sus momentos asintóticos correspondientes a la densidad asintótica $\rho^{**}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{x}{n}\right)$, son

$$(4.12) \quad \mu_m''' = \frac{1}{m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

O sea, la densidad asintótica de los ceros *reescalados* de los polinomios de Charlier corresponden a la distribución uniforme [45, Vol 2, p. 276],

$$(4.13) \quad \rho\left(\frac{x}{n}\right) = 1, \quad 0 \leq \frac{x}{n} \leq 1.$$

Este resultado es evidente a partir del teorema 11 cuando escogemos $\phi(n) = n$, entonces tenemos $a = 1$ y $b = 0$, por lo que 11 nos conduce a la expresión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_{nk}}{n}\right)^m = \frac{1}{m+1}.$$

⁹Usualmente también se le llaman polinomios discretos de Charlier.

Este resultado ha sido encontrado también por Kuijlaars–Van Assche [52] utilizando otras técnicas.

Además, el lema 1 nos permite calcular los momentos de orden bajo

$$\begin{aligned}\mu_1^{l(n)} &= \frac{n+2\mu-1}{2}, & \mu_2^{l(n)} &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6} + 2(n-1)\mu + \mu^2, \\ \mu_3^{l(n)} &= \frac{(n-1)^2 n}{4} + 3(n-1)^2 \mu + \frac{9(n-1)\mu^2}{2} + \mu^3, \\ \mu_4^{l(n)} &= \frac{n^2(10+3n(2n-5))-1}{30} + 4(n-1)^3 \mu + 2(n-1)(6n-7)\mu^2 + 8(n-1)\mu^3 + \mu^4.\end{aligned}$$

Polinomios de Chebyshev

El caso de los polinomios de Chebyshev $t_n(x, N)$ es completamente distinto pues ellos, a diferencia de los Charlier, constituyen una familia finita de polinomios ortogonales ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) [21, 64, 65, 75]. Por tanto, en este caso, de las dos técnicas anteriores, teoremas 10 y 11, sólo podemos utilizar la primera. Veamos como proceder en este caso los coeficientes de la relación de recurrencia (3.14) tienen la forma

$$(4.14) \quad a_n = \frac{N-1}{2}, \quad b_n^2 = \frac{n^2(N^2-n^2)}{4(4n^2-1)},$$

y por tanto los momentos espectrales tienen la forma (ver fórmula (3.15))

$$\mu_m^{l(N)} = \frac{1}{n} \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r_j, r'_{j+1}) \sum_{i=1}^{n-s} \prod_{k=1}^{j+1} \left[\frac{(N-1)}{2} \right]^{r'_k} \prod_{k=1}^j \left[\frac{(i+k-1)^2 [N^2 - (i+k-1)^2]}{4[4(2i+2k-1)^2 - 1]} \right]^{r_k},$$

de donde se deducen las expresiones

$$\begin{aligned}\mu_1^{l(n)} &= \frac{N-1}{2}, & \mu_2^{l(n)} &= \frac{2n^2 - n^3 + n(3N-2)^2 - 6(N-1)N - 2}{24n-12}, \\ \mu_3^{l(n)} &= \frac{(N-1)((2-n)n^2 + (2-4n)N + (5n-4)N^2)}{16n-8},\end{aligned}$$

para los tres primeros momentos.

Por conveniencia se suele utilizar muchas veces en vez de los t_n , los polinomios reescalados

$$(4.15) \quad T_n(x, N) \equiv \left(\frac{N-1}{2} \right)^{-n} t_n \left(\frac{N-1}{2}(x+1), N \right),$$

y cuyos coeficientes de la relación de recurrencia (3.14) son

$$(4.16) \quad a_n = 0, \quad b_n^2 = \frac{n^2(N^2-n^2)}{(N-1)^2(4n^2-1)}.$$

Entonces, (3.15) se transforma en

$$\mu_m^{l(N)} = \begin{cases} \frac{2}{n} \sum_{p=1}^k \left(\sum_{(m)} F(0, r_1, 0, r_2, \dots, 0, r_p) \right) \sum_{i=1}^{n-p} \prod_{k=1}^p \left[\frac{(i+k-1)^2 [N^2 - (i+k-1)^2]}{(N-1)^2 [4(i+k-1)^2 - 1]} \right]^{r_k}, & m = 2k \\ 0, & m = 2k+1 \end{cases},$$

de donde deducimos para los primeros momentos no nulos

$$\mu_2^{(n)} = \frac{(n-1)(3N^2 - n^2 + n - 1)}{3(2n-1)(N-1)^2},$$

$$\mu_4^{(n)} = \frac{1}{15(2n-3)(2n-1)^2(N-1)^4} \left[45n^3N^4 + 98n - 200n^2 + 276n^3 - 274n^4 + 172n^5 - 60n^6 + 9n^7 + 90N^2 - 360nN^2 + 510n^2N^2 - 360n^3N^2 + 150n^4N^2 - 30n^5N^2 - 45N^4 + 150nN^4 - 150n^2N^4 - 21 \right].$$

Al ser los polinomios de Chebyshev una familia finita, tenemos que considerar dos posibilidades a la hora de encontrar los momentos de su distribución asintótica. La primera consiste en prefijar N , el número de puntos de crecimiento de la medida con respecto a la cual éstos son ortogonales, y hacer tender n a infinito, con lo que tendríamos el caso $n > N$ y por tanto estaríamos en presencia de polinomios no ortogonales [21, 65], o bien hacer tender $n \rightarrow \infty$ pero de tal forma que $n < N$. Esto último se puede conseguir si, por ejemplo, imponemos la condición $n/N = t \in (0, 1)$ ($(n, N) \rightarrow \infty$) [31, 32, 51, 68].

En el primer caso, o sea, $n \rightarrow \infty$ y N fijo, para los polinomios $t_n(x, N)$ tenemos

$$a_n = \frac{(2N-2)n^2 + O(n)}{4n^2 + O(n)}, \quad b_n^2 = \frac{-n^6 + O(n^5)}{16n^4 + O(n^3)},$$

por tanto el teorema 10 nos dice que estos polinomios (ya no ortogonales pero que satisfacen una relación de recurrencia) pertenecen a la clase 7c. Luego, los momentos de la distribución asintótica con densidad $\rho^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{x}{n}\right)$ se expresan de la forma

$$(4.17) \quad \begin{cases} \mu_{2m}'' = \frac{1}{2m+1} \left(\frac{-1}{16}\right)^m \binom{2m}{m}, & m = 0, 1, 2, \dots \\ \mu_{2m+1}'' = 0, \end{cases}$$

Consideremos ahora el segundo caso. Como ejemplo tomemos los polinomios reescalados. En este caso los coeficientes de la relación de recurrencia se comportan asintóticamente como

$$a_n = 0, \quad b_n^2 = \frac{\left(\frac{n}{N-1}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{n}{N}\right)^2\right]}{4\left(\frac{n}{N}\right)^2 - \frac{1}{N^2}},$$

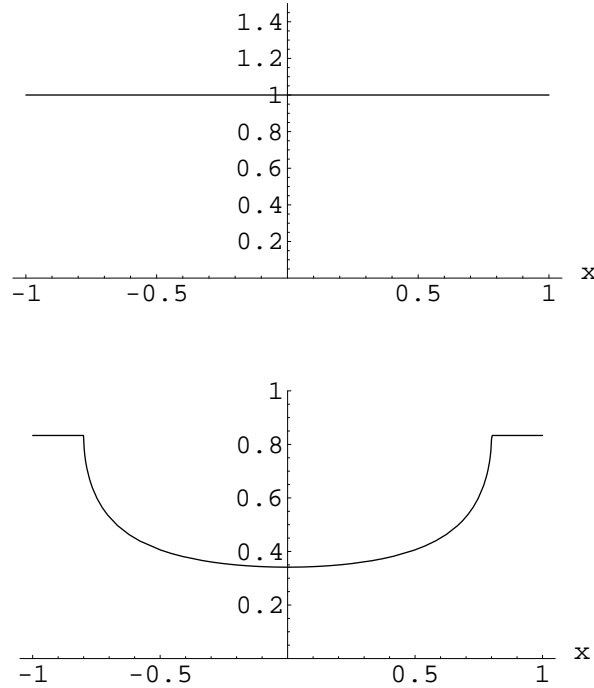
por tanto sus momentos son

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, & \mu_2 &= \frac{1}{2} - \frac{t^2}{6}, & \mu_3 &= 0, & \mu_4 &= \frac{3}{8} - \frac{t^2}{4} + \frac{3t^4}{40}, & \mu_5 &= 0, \\ \mu_6 &= \frac{5}{16} - \frac{5t^2}{16} + \frac{3t^4}{16} - \frac{5t^6}{112}, \end{aligned}$$

que corresponden con la densidad asintótica de la distribución de ceros

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi t} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) & x \in [-r, r], \\ \frac{1}{2t} & |x| \in [r, 1], \end{cases} \quad r = \sqrt{1 - t^2},$$

obtenida por Rakhmanov en [68, Eq. (1.3) page 114] (ver además [51]) mediante técnicas de teoría del potencial.



Densidad de ceros de los Polinomios de Chebyshev y Charlier.

4.3 q -Polinomios de Charlier y polinomios de Askey-Wilson.

4.3.1 Los q -polinomios de Charlier $c_n^\mu(x, q)$ en la red $x(s) = q^s$.

Los q -polinomios de Charlier son los polinomios ortogonales asociados a la función de distribución $d\alpha(x)$ cuando $\alpha(x)$ es una función escalonada con saltos de magnitud $\rho(s) = \frac{\mu^x \{1-q\} \mu; q)_\infty}{\Gamma_q(s+1)}$, $q < 1$, donde

$$(4.18) \quad \Gamma_q(s) = \begin{cases} (1-q)^{1-s} \frac{\prod_{k=0}^{\infty} (1-q^{k+1})}{\prod_{k=0}^{\infty} (1-q^{s+k})}, & 0 < q < 1 \\ q^{\frac{(s-1)(s-2)}{2}} \Gamma_{q^{-1}}(s), & q > 1 \end{cases},$$

es el q -análogo de la función gamma de Euler, y

$$(4.19) \quad (a; q)_\infty = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - aq^m).$$

Estos polinomios satisfacen una RRTT del tipo (3.14) de la forma

$$x c_n^\mu(x, q) = c_{n+1}^\mu(x, q) + \left(1 + \kappa_q q^{2n + \frac{3}{2}} \left\{ \mu + q^{-\frac{3(n+1)}{2}} [n]_q (1 - \mu(1-q)q^n) \right\} \right) c_n^\mu(x, q) + \mu \kappa_q^2 q^{\frac{5n}{2} - 1} [n]_q \{1 - \mu(1-q)q^n\} c_{n-1}^\mu(x, q),$$

y una ecuación en diferencias del tipo (2.22) con

$$x(s) = q^s, \quad \sigma(s) = q^s(q^s - 1), \quad \tau(s) = \frac{\mu q(q-1) + 1 - q^s}{\kappa_q}, \quad \lambda_n = [n]_q \frac{q^{-\frac{(n-1)}{2}}}{\kappa_q}.$$

Como estamos en el caso $q < 1$, y el teorema esta probado para $q > 1$, tenemos que ser cuidadosos al aplicarlo. Ante todo notemos que los términos dominantes para los coeficientes de la relación de recurrencia son

$$a_n \sim (1 - q^{-\frac{1}{2}}) = \alpha_0^{(0)} q^{0n}, \quad b_n^2 \sim -\kappa_q \mu q q^{2n} = \theta_0^{(0)} q^{2n}.$$

Como $q < 1$, estamos en presencia del caso $g_m = h_m = k_m = l_m = 0$ para todo $m = 0, 1, \dots, N$ y

$$d_0 = 0, \quad e_0 = 0, \quad f_0 = -2, \quad s_0 = 0.$$

O sea, $d_0 - e_0 = 0$ y $f_0 - s_0 = -2 < 0$, lo que corresponde al caso 2(a)ii del teorema 14. Por tanto, la ecuación (3.63) del teorema 16 nos da:

$$(4.20) \quad \mu'_m(1) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ \sum_{(m)} F(r'_1, 0, \dots, 0, r'_{j+1}) \left(1 - q^{-\frac{1}{2}}\right)^{R'} & m \geq 1. \end{cases}$$

para los momentos correspondientes a la densidad asintótica de los ceros $\rho(x)$.

Por completitud vamos a obtener el resultado anterior directamente del lema 1. Como $a_n \sim \alpha_0^{(0)} q^{0n}$ y $b_n^2 \sim \theta_0^{(0)} q^{2n}$, $q < 1$, utilizando la expresión (3.15), tenemos

$$\begin{aligned} \mu_m^{l(N)} &= \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r_j, r'_{j+1}) \sum_{i=1}^{n-s} \left[\prod_{k=1}^{j+1} a_{i+k-1}^{r'_k} \right] \left[\prod_{k=1}^j (b_{i+k-1}^2)^{r'_k} \right] \sim \\ &\sim \sum_{(m)} F(r'_1, r_1, \dots, r_j, r'_{j+1}) (\alpha_0^{(0)})^{R'} (\theta_0^{(0)})^R q^{2 \sum_{k=1}^{j-1} k r_{k+1}} \sum_{i=1}^{n-s} (q^{2R})^i. \end{aligned}$$

Ahora bien, la función $\sum_{i=1}^{n-s} (q^{2R})^i = q^{2R} \frac{1 - q^{2R(N-t)}}{1 - q^{2R}}$ tiene su máximo ($q < 1$) en $R = 0$, lo cual corresponde a la partición $(r'_1, 0, r'_2, 0, \dots, 0, r'_{j+1})$, luego

$$\mu_m^{l(N)} \sim \sum_{(m)} F(r'_1, 0, \dots, 0, r'_{j+1}) \left(\alpha_0^{(0)} \right)^{R'} N,$$

que nos conduce directamente a la densidad asintótica buscada.

4.3.2 Los q-polinomios de Askey y Wilson $p_n(x, a, b, c, d)$.

Como última aplicación, encontremos los momentos asintóticos de los polinomios de Askey y Wilson [47], para $q > 1$, $q \in \mathbb{R}$. Estos polinomios satisfacen una [47, pág. 51]:

$$(4.21) \quad \begin{aligned} x p_{n-1}(x, a, b, c, d) &= p_n(x, a, b, c, d) + B_{n-1} p_{n-2}(x, a, b, c, d) + \\ &+ \frac{1}{2} [a + a^{-1} - (A_{n-1} + C_{n-1})] p_{n-1}(x, a, b, c, d), \end{aligned}$$

donde $B_{n-1} = A_{n-1} C_{n-1}$, y

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(1 - a b c d q^{-1+n}) (1 - a b q^n) (1 - a c q^n) (1 - a d q^n)}{a (1 - a b c d q^{2n}) (1 - a b c d q^{-1+2n})}, \\ C_n &= \frac{a (1 - b c q^{-1+n}) (1 - b d q^{-1+n}) (1 - c d q^{-1+n}) (1 - q^n)}{(1 - a b c d q^{-2+2n}) (1 - a b c d q^{-1+2n})}. \end{aligned}$$

Si comparamos (4.21) con (3.14) obtenemos que:

$$a_n^{num} = -\alpha_0^{(0)} q^{3n} = qabcd(abc + abd + acd + bcd + q(a + b + c + d))q^{3n},$$

$$a_n^{den} = -\beta_0^{(0)} q^{4n} = 2a^2b^2c^2d^2q^{4n},$$

y

$$(b_n^{num})^2 = \theta_0^{(0)} q^{8n} = a^4b^4c^4d^4q^{8n}, \quad (b_n^{den})^2 = \gamma_0^{(0)} q^{8n} = a^4b^4c^4d^4q^{8n}.$$

Luego, $g_m = h_m = k_m = l_m = 0$ para todo $m = 0, 1, \dots, N$ y

$$d_0 = 3, \quad e_0 = 4, \quad f_0 = 8, \quad s_0 = 8.$$

O sea, el caso $d_0 - e_0 = -1 < 0$ y $f_0 - s_0 = 0$ 2(a)iii. Por tanto, la ecuación (3.65) del teorema 16 nos da la siguiente expresión para los valores de los momentos correspondientes a la densidad normalizada a la unidad $\rho_1(x)$ (3.58):

$$(4.22) \quad \mu'_m(1) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ \sum_{(m)} F(0, r_1, 0, \dots, r_j, 0) & m \geq 1. \end{cases} .$$

Referencias

- [1] W.A. Al-Salam, Characterization Theorems for Orthogonal Polynomials. En *Orthogonal Polynomials. Theory and Practice*. P. Nevai (Ed.) **Vol. 294**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, 1-24.
- [2] R. Álvarez-Nodarse, *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*. Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza (1998) (en prensa).
- [3] R. Álvarez-Nodarse, E. Buendía and J.S. Dehesa, On the distribution of zeros of the generalized q-orthogonal polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) 6743-6768.
- [4] R. Álvarez-Nodarse and J. S. Dehesa, Zero distribution of discrete and continuous polynomials from their recurrence relation. *Preprint* (1998).
- [5] R. Álvarez-Nodarse and Yu.F. Smirnov, q-Dual Hahn polynomials on the non-uniform lattice $x(s) = [s]_q[s+1]_q$ and the q-algebras $SU_q(1,1)$ and $SU_q(2)$. *J. Phys. A: Math. and Gen.* **29** (1996), 1435-1451.
- [6] G. E. Andrews, *q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra*. Conference Series in Mathematics. Number 66. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1986.
- [7] G. E. Andrews and R. Askey, Classical Orthogonal Polynomials. *Polynômes orthogonaux et applications*. C.Brezinski et al. (Eds.) Lecture Notes in Mathematics. **Vol. 1171**. Springer Verlag, Berlin, 1985, 36-62.
- [8] E. R. Arriola, A. Zarzo and J.S. Dehesa, Spectral properties of the biconfluent Heun differential equation. *J. Comput. Appl. Math.* **37** (1991), 161-169.
- [9] R. Askey, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*. Regional Conferences in Applied Mathematics. **21**, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1975.
- [10] R. Askey and R. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi Polynomials. *Mem. Amer. Math. Soc.* **319** Providence, Rhode Island, 1985.
- [11] N. M. Atakishiyev and S. K. Suslov, Continuous orthogonality property for some classical polynomials of a discrete variable. *Rev. Mexicana Fís.* **34** (1988), 152-167.
- [12] N. M. Atakishiyev and S. K. Suslov, On Askey-Wilson polynomials. *Constructive Approx.* **8** (1992), 1363-369.
- [13] N. M. Atakishiyev, M. Rahman and S. K. Suslov, On classical orthogonal polynomials. *Constructive Approx.* **11** (1995), 181-226.
- [14] W.N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, England, 1935. (reprinted 1964 by Stechert-Hafner Service Agency, New York-London)
- [15] G. Birkhoff and G. Rota, *Ordinary Differential Equations*. John Willey & Sons. New York, 1989.
- [16] B. V. Bronk, Theorem relating the eigenvalue density for random matrices to the zeros of the classical polynomials. *J. Math. Phys.* **12** (1964), 1661-1663
- [17] E. Buendía, S. J. Dehesa and M. A. Sanchez-Buendía, On the zeros of eigenfunctions of polynomial differential operators. *J. Math. Phys.* **26** (1985), 2729-2736.
- [18] E. Buendía, S. J. Dehesa and F. J. Gálvez, The distribution of the zeros of the polynomial eigenfunction of ordinary differential operators of arbitrary order. *Orthogonal Polynomials and their Applications*. M.Alfaro et al. (Eds.) Lecture Notes in Mathematics. **Vol. 1329**, Springer Verlag, Berlin, 1988, 222-235.
- [19] C. Campigotto, Yu. F. Smirnov and S. G. Enikeev, q-Analogue of the Kravchuk and Meixner orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **57** (1995), 87-97.

- [20] K. M. Case, Sum rules for zeros of polynomials I. *J. Math. Phys.* **21** (1980), 702-708.
- [21] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978.
- [22] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. Robert E. Krieger Publishing Company. Malabar, Florida, 1984.
- [23] J. S. Dehesa and A.F. Nikiforov, The orthogonality properties of q -polynomials. *Integral Transforms Special Functions.* **4** (1996), 343-354.
- [24] J. S. Dehesa, On the conditions for a Hamiltonian matrix to have an eigenvalue density with some prescribed characteristics. *J. Comput. Appl. Math.* **2** (1976) 249-254.
- [25] J. S. Dehesa, The asymptotical spectrum of Jacobi matrices. *J. Comput. Appl. Math.* **3** (1977) 167-171.
- [26] J. S. Dehesa, The eigenvalue density of rational Jacobi matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.* **9** (1978) L223-L226.
- [27] J.S. Dehesa, *Propiedades medias asintóticas de ceros de polinomios ortogonales y de autovalores de matrices de Jacobi*. Tesis Doctoral. Departamento de Teoría de Funciones, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 1977.
- [28] J. S. Dehesa, On a general system of orthogonal q -polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **5** (1979) 37-45.
- [29] J. S. Dehesa, The eigenvalue density of rational Jacobi matrices. II. *Linear Algebra and its Applications* **33** (1980) 41-55.
- [30] J. S. Dehesa and A. Zarzo, Many-body systems, orthogonal polynomials and the Lauricella function $F_D^{(5)}$. *Physicalia Mag.* **14** (1992), 35-45.
- [31] P. D. Dragnev and E. B. Saff, Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable. *J. d'Analyse Math.* **72**, (1997), 223-259.
- [32] P. D. Dragnev and E. B. Saff, A problem in potential theory and zero asymptotics of Krawtchouk polynomials. *Preprint*. (1998).
- [33] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Mir, Moscú, 1983.
- [34] A. Erdélyi, A. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill Book Co. New York, Vols. 1,2, 1953; **Vol 3**, 1955.
- [35] P. Erdős and P. Turán, On interpolation, III. *Ann. Math.* **41** (1940), 510-555.
- [36] N. J. Fine, *Basic Hypergeometric Series and Applications*. Mathematical Surveys and Monographs. Number 27. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1988.
- [37] F. Gálvez and J.S. Dehesa, Some open problems of generalized Bessel polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** (1984), 2759-2766.
- [38] A. G. García, F. Marcellán, and L. Salto, A distributional study of discrete classical orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **57**(1-2) (1995), 147-162.
- [39] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [40] W. Gawronski, On the asymptotic distribution of the zeros of Hermite, Laguerre and Jonquiére polynomials. *J. Approx. Th.* **50** (1985), 214-231.
- [41] B. Germano, P. Natalini, and P. E. Ricci, Computing the moments of the density of zeros for orthogonal polynomials. *Computers Math. Applic.* **30** (1995), 69-81.

- [42] B. Germano and P. E. Ricci, Representation formulas for the moments of the density of zeros of orthogonal polynomial sets. *Le Matematiche* **48** (1993), 77-86.
- [43] E. Grosswald, *Bessel Polynomials. Lecture Notes in Mathematics Vol. 698*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [44] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser, Boston, 1982.
- [45] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions*. (2nd Edition) Wiley Series in Probability and Statistics. (John Wiley & Sons. N.Y. 1994).
- [46] M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics. Vol. I*, Hafner, New York, 1969, (tercera edición).
- [47] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue. *Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics No. 94-05*. Delft University of Technology, Delft, 1994.
- [48] T. H. Koornwinder, Orthogonal polynomials in connection with quantum groups. *Orthogonal Polynomials. Theory and Practice*. P.Nevai (Ed.) **Vol. 294**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, 257-292.
- [49] T. H. Koornwinder, Compact quantum groups and q -special functions. *Representations of Lie groups and quantum groups*. V. Baldoni & M.A. Picardello (Eds.) Pitman Research Notes in Mathematics series 311, Longman Scientific & Technical, London, (1994), 46-128.
- [50] T. H. Koornwinder, Special functions associated with root systems: recent progress *From Universal Morphisms to Megabytes – a Baayen Space Odyssey*, K.R. Apt, A. Schrijver and N. M. Temme (Eds.), CWI, Amsterdam, 1994, 391-404.
- [51] A.B.J. Kuijlaars and E.A. Rakhmanov, Zero distribution for discrete polynomials. *Preprint* (1998)
- [52] A.B.J. Kuijlaars and W. Van Assche, Extremal polynomials on discrete sets. *Proc. London Math. Soc.* (1999) (en prensa)
- [53] A.B.J. Kuijlaars and W. Van Assche, The asymptotic zero distribution of orthogonal polynomials with varying recurrence coefficients. *J. Approx. Theory* (1999) (en prensa)
- [54] W. Lang, On sums of powers of zeros of polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **89** (1998) 237-256.
- [55] A. A. Malashin, q -Ánálogo de los polinomios de Racah en la red $x(s) = [s]_q [s+1]_q$ y su conexión con los símbolos $6-j$ de las álgebras cuánticas $SU_q(2)$ y $SU_q(1,1)$. Tesis de Maestría. Universidad Estatal de Moscú *M.V. Lomonosov*. Moscú, Enero de 1992. (en ruso).
- [56] F. Marcellán and J. Petronilho, On the solutions of some distributional differential equations: existence and characterizations of the classical moment functionals. *Integral Transforms and Special Functions* **2** (1994), 185-218.
- [57] J. C. Medem, *Polinomios q -semiclásicos. Tesis Doctoral*. Universidad Politécnica. Madrid, 1996.
- [58] P. G. Nevai and J.S. Dehesa, On asymptotic average properties of zeros of orthogonal polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* **10** (1979), 1184-1192.
- [59] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, Classical orthogonal polynomials in a discrete variable on nonuniform lattices. *Preprint Inst. Prikl. Mat. Im. M. V. Keldysha Akad. Nauk SSSR*. Moskva. 1983, No.17, (1983) 34 pp. (en ruso).
- [60] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov and V. B. Uvarov, Classical orthogonal polynomials of a discrete variable and representations of the three-dimensional rotation group. *Functional Anal. Appl.* **19** (1985), 182-193.
- [61] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov and V. B. Uvarov, Classical orthogonal polynomials in a discrete variable on nonuniform lattices. *Sov. Math., Dokl.* **34** (1987), 576-579; translation from *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. **291** (1986), 1056-1059.

- [62] A. F. Nikiforov and S. K. Suslov, Classical orthogonal polynomials of a discrete variable on nonuniform lattices. *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), 27-34.
- [63] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, Classical orthogonal polynomials of a discrete variable. *Current problems of applied mathematics and mathematical physics, Collect. Sci. Works*, Moscow, 78-91 (1988). (en ruso).
- [64] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.
- [65] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov and V. B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [66] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, Polynomial Solutions of hypergeometric type difference Equations and their classification. *Integral Transforms and Special Functions.* **1** (1993), 223-249.
- [67] I. V. V. Raghavacharyulu and A. R. Tekumalla, Solution of the difference equation of generalized Lucas polynomials. *J. Math. Phys.* **13** (1972), 321-234.
- [68] E.A. Rakhmanov, Equilibrium measure and the distribution of zeros of the extremal polynomials of a discrete variable. *Math. Sb.* **187**:8 (1996), 109-124.
- [69] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Wiley, New York, 1958.
- [70] E. B. Saff and V. Totick, *Logarithmic Potentials with External Fields*. Springer, N.Y. 1997.
- [71] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, *The problem of Moments*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1943.
- [72] Yu. F. Smirnov and A. Del Sol Mesa, Orthogonal polynomials of the discrete variable associated with $SU_q(2)$ and $SU_q(1,1)$ quantum algebras. *International Workshop Symmetry Methods in Physics in Memory of Professor Ya.A. Smorodinsky*. A.N. Sissakian, G.S. Pogosyan and S.I.Vinitzky (Eds.) JINR, E2-94-447, **Vol.2**, Dubna 1994, 479-486.
- [73] P. K. Suetin, *Polinomios Ortogonales Clásicos* Nauka, Moscú, 1976 (en ruso).
- [74] S. K. Suslov, The theory of difference analogues of special functions of hypergeometric type. *Uspekhi Mat. Nauk.* **44**:2 (1989), 185-226. (Russian Math. Survey **44**:2 (1989), 227-278.)
- [75] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications **23**. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975 (4^{ta} edición).
- [76] W. Van Assche, Some results on the asymptotic distribution of the zeros of orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **12**& **13** (1985), 615-623.
- [77] W. Van Assche, *Asymptotics for Orthogonal Polynomials*. Lecture Notes in Mathematics **Vol. 1265**. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [78] W. Van Assche, Asymptotics properties of orthogonal polynomials from their recurrence relation II. *J. Approx. Th.* **52** (1988), 322-338.
- [79] W. Van Assche, Orthogonal polynomials on non-compact sets. *Acad. Analecta, Koninkl. Akad. Wensch. Lett. Sch. Kunsten België.* **51**(2) (1989), 1-36.
- [80] N. Ja. Vilenkin and A.U. Klimyk, *Representations of Lie Groups and Special Functions*. **Vol. I,II,III**. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1992.
- [81] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, Fourth Ed., Cambridge, 1927 (reimpreso).
- [82] A. Zarzo, *Estudio de las densidades discreta y asintótica de ceros de polinomios ortogonales*. Tesina. Universidad de Granada, Granada 1991.

- [83] A. Zarzo, *Ecuaciones Diferenciales de Tipo Hipergométrico*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 1995.
- [84] A. Zarzo and J. S. Dehesa, Spectral Properties of solutions of hypergeometric-type differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* **50** (1994), 613-623.
- [85] A. Zarzo, J. S. Dehesa and R.J. Yáñez, Distribution of zeros of Gauss and Kummer hypergeometric functions: a semiclassical approach. *Annals Numer. Math.* **2** (1995), 457-472.
- [86] A. Zarzo and A. Martínez, The quantum relativistic harmonic oscillator: Spectrum of zeros of its wave functions. *J. Math. Phys.* **34**(4) (1993), 2926-2935.